

सम-सामयिक

घटना

चक्र

परीक्षा संवाद के 25 वर्ष

Website: <http://www.ssgcp.com/>

<https://www.facebook.com/ssgcpl>

<https://www.facebook.com/ssghatnachakra>

<https://plus.google.com/+Ssgcpssgcp>

<https://twitter.com/SamsamyikGhatna>

A

शिक्षक पात्रता परीक्षा UPTET CTET

गणित

अध्ययन सामग्री

सम-सामयिक

घटना

चक्र

परिक्षा संवाद के 25 वर्ष

Website: <http://www.ssgcp.com/>

<https://www.facebook.com/ssgcp/>

<https://www.facebook.com/ssghatnachakra>

<https://plus.google.com/+Ssgcpssgcp>

<https://twitter.com/SamsamyikGhatna>

शिक्षक

पाठ्यता परीक्षा

UP TEST

CTEST

Knowledge Mantra Education
9118908845

गणित

अध्ययन सामग्री

-: प्रकाशक :-

सम-सामयिक घटना चक्र

188A/128 एलनगंज, चर्चलेन, इलाहाबाद - 211002

दूरभाष : 2465524, 2465525, 9335140296

मूल्य :
40/-

© प्रकाशकाधीन :

संस्करण - प्रथम

संस्करण वर्ष - 2018

ले.: SSGC

मूल्य : 40/-

मुद्रक : अमर मुद्रणालय

संपर्क-

सम-सामयिक घटना चक्र

188A/128

एलनगंज, चर्चलेन

इलाहाबाद - 211002

Ph.: 0532-2465524,

2465525

Mob.: 9335140296

e-mail :

ssgcald@yahoo.co.in

Website : ssgcp.com

e-shop :

shop.ssgcp.com

■ इस प्रकाशन के किसी भी अंश का पुनः प्रस्तुतीकरण या किसी भी रूप में प्रतिलिपिकरण (फोटोप्रति या किसी भी माध्यम में ग्राफिक्स के रूप में संग्रहण, इलेक्ट्रॉनिक या यांत्रिकीकरण द्वारा जहां कहीं या अस्थायी रूप से या किसी अन्य प्रकार के प्रसंगवश इस प्रकाशन का उपयोग भी) कॉपीराइट के स्वामित्व धारक के लिखित अनुमति के बिना नहीं किया जा सकता है।

किसी भी प्रकार से इसके भंग होने या अनुमति न लेने की स्थिति में बिना किसी पूर्व सूचना के उन पर कानूनी कार्यवाही की जाएगी।

*इस प्रकाशन से संबंधित सभी विवादों का निपटारा न्यायिक क्षेत्र इलाहाबाद के न्यायालय न्यायाधिकरण के अधीन होगा।

अनुक्रमणिका

भाग - 1

गणित शिक्षण विधि एवं अधिगम

- ☐ प्राइमरी स्तर पर गणित
- ☐ प्राइमरी गणित : पाठ आयोजना
- ☐ गणित शिक्षण की विधियाँ
- ☐ गणित शिक्षण में मूल्यांकन
- ☐ प्राइमरी गणित : शिक्षण अधिगम

भाग - 2

मूलभूत गणितीय

संकल्पनाओं का शिक्षण

- ☐ संख्यांक : आधारभूत संक्रियाएं एवं संख्या पद्धति
- ☐ भिन्न एवं दशमलव, प्रतिशतता एवं अनुपात/समानुपात
- ☐ मापन और क्षेत्रमिति
- ☐ ज्यामितीय संकल्पनाएं और आरेखन कौशल

समारम्भ

गणित रुचि का विषय है। शिक्षार्थियों की रुचि इस विषय में कैसे जाग्रत हो और जाग्रत रहे, यह शिक्षकों के लिए सदा ही अत्यधिक चुनौतीपूर्ण रहा है। शिक्षण विधि एवं अधिगम की दिशा में नित, निरंतर अनुसंधान होते रहे हैं जिनका उपयोग कर शिक्षक विद्यार्थियों में विषय के प्रति रुचि का वर्धन करते रहे हैं लेकिन मात्र शिक्षण विधि को आत्मसात कर इस विषय के अध्यापन की योग्यता नहीं पायी जा सकती है। यह पूर्णतः अध्यापक की व्यक्तिगत शैली पर निर्भर करता है कि वह विद्यार्थियों को कितना इस विषय के प्रति आकर्षित कर पाता है। एक ही प्रशिक्षण विद्यालय से प्रशिक्षित शिक्षकों की अध्यापन क्षमता में काफी अंतर दृष्टिगत रहा है। अतः यह सलाह दी जा सकती है शिक्षक गणित शिक्षण हेतु उपलब्ध सामग्रियों का भले ही उपयोग करें, अध्यापन हेतु अपनी शैली विकसित करें, जिसमें व्यावहारिक दृष्टिकोण का समावेश हो। CTET परीक्षण परीक्षा में अध्यापकों की शिक्षण योग्यता का परीक्षण करने हेतु जो प्रश्न पूछे गये थे, उसमें अधिगम आधारित प्रश्न भी थे और गणितीय संक्रियाओं पर आधारित भी, लेकिन राज्यों की TET परीक्षा में मात्र गणितीय संक्रियाओं पर आधारित प्रश्न पूछे गये थे। यहां दोनों ही पक्षों के समावेशन के साथ पुस्तक प्रस्तुत की जा रही है।

गणित शिक्षण विधि एवं अधिगम

□ प्राथमिक स्तर पर गणित

● प्रस्तावना

विज्ञान और प्रौद्योगिकी के इस युग में गणित का सुदृढ़ आधार सभी के लिए नितान्त अनिवार्य माना जाता है। प्रारंभिक स्तर से उच्च स्तर तक विविध रूपों में इसका ज्ञान जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में अपेक्षित है, चाहे वह घर, व्यवसाय, उद्योग, सरकार हो या कम्प्यूटर अथवा निर्णयना। विश्व भर में यह स्वीकार कर लिया गया है कि प्रत्येक नागरिक को कुछ मूलभूत गणितीय ज्ञान और कौशलों से लैस होना आवश्यक है। अतः गणित सार्वभौम शिक्षा का एक अंग बन गया है और एक से दस तक की कक्षाओं के लिए अध्ययन का अनिवार्य विषय बना दिया गया है।

● गणित अधिगम का महत्त्व

गणित के प्रयोग के बिना किसी भी क्रिया के विषय में सोचना असंभव है, चाहे वह भूमि खोदना, सामान लादना और उतारना, पशु चराना, कारखाने में श्रम कार्य जैसा कौशल निरपेक्ष कार्य हो या मापन, यांत्रिक कार्य, परिकलन, इत्यादि जैसे कौशलपूर्ण कार्य। प्रायः गणित के मापन-प्रकार्य के प्रयोग से ही हम भौतिक पदार्थों और घटनाओं का वर्णन कर पाते हैं। गणित के बिना कोई भी आर्थिक क्रिया नहीं की जा सकती है। अतः सबके लिए गणित सीखना अनिवार्यतः अपेक्षित है। निम्नलिखित अनुभाग में गणित अधिगम के प्रकार्यात्मक, अनुशासनिक और सांस्कृतिक पक्षों पर चर्चा की गई है।

● प्रकार्यात्मक पक्ष

गणित के इतिहास में झांकने से हमें पता चलता है कि गणित अधिगम के लिए मुख्य अभिप्रेरक उसकी प्रकार्यात्मक उपयोगिता से मिला है। भूमि सर्वेक्षण की समस्याओं के कारण ज्यामिति की आवश्यकता पड़ी, जबकि वाणिज्य मापन और क्षेत्रमिति की समस्याओं में उपयोगी होने के कारण अंकगणित और बीजगणित का प्रादुर्भाव हुआ। ज्यामिति के कुछ पक्ष यथा सममिति को वास्तुकला, मूर्तिकला और ललित कलाओं में अभिव्यक्ति मिली है। प्राकृतिक घटनाओं का प्रेक्षण, जैसे आकाश में ध्रुवतारे का एक निश्चित स्थिति में दिखना, खगोलीय घटनाओं का चक्रीय आवर्तन और उनसे संबद्ध गणितीय प्रक्रियाओं ने गणित-ज्योतिष के क्षेत्र में प्रविधियों के सुधार में मानव जाति की सहायता की है। खेतों का इष्टतम प्रयोग और बेहतर उपज गणित के प्रभाव के कारण है। यातायात और संचार की विविध प्रणालियों की आयोजना भी गणित के ज्ञान पर आधारित हैं। अनेक वैज्ञानिक आविष्कार गणित का परिणाम हैं।

गणित के प्रकार्यात्मक पक्षों को दर्शाने वाली कुछ दक्षताओं का इस प्रकार वर्णन किया जा सकता है :

- ◆ जोड़, घटाना, गुणा और भाग से संबंधित संख्याओं, भिन्नों और दशमलवों का परिकलन
- ◆ प्रतिशत/अनुपात
- ◆ सारणी/ग्राफ पठन
- ◆ आकलन/संख्याओं का निकटन

- ◆ मापन और उसके लिए उपकरणों का प्रयोग
- ◆ सांख्यिकी
- ◆ स्थानिक संबंध-ज्यामितीय रचनाएं
- ◆ पाइथागोरस संबंध
- ◆ बीजीय प्रतीकवाद
- ◆ दैनिक जीवन में प्रयुक्त सूत्र

● अनुशासनिक (विद्याशाखापरक) पक्ष

विद्याशाखा के रूप में गणित के अध्ययन से अनेक मूल्य जुड़े हैं। गणित मस्तिष्क को विशिष्ट तरीके से कार्य करने के लिए अनुशासित करता है। बच्चों में कुछ वांछित अभिवृत्तियों, रुचियों और अनुभूतियों को विकसित करने की आवश्यकता होती है। गणित शिक्षण से शिक्षार्थियों में वस्तुनिष्ठता, तार्किक दृष्टिकोण, विश्लेषणात्मक चिंतन योग्यता, वैज्ञानिक स्वभाव, सौन्दर्यशास्त्र का अभिज्ञान और रसबोध जैसी विशेषज्ञ अभिवृत्तियों एवं अनुभूतियों का सृजन किया जा सकता है। प्राकृतिक घटनाओं के एक नियत स्वरूप, लय और आवर्तन की पहचान से मानव को अपनी जीवनशैली के आयोजन और दैनिक जीवन की समस्याओं को सुलझाने में सहायता मिली है।

● सांस्कृतिक पक्ष

गणित विषय प्रत्येक देश की सांस्कृतिक विरासत से निकटता से जुड़ा है। हमारे देश की एक गणितीय विरासत है जिस पर हमें गर्व है। संख्यांक, संख्याकों की दशमलव प्रणाली और शून्य, जिसका आज सारा विश्व प्रयोग कर रहा है, वह हमारे प्राचीन भारतीय गणितज्ञों की देन है। कुछ प्रसिद्ध भारतीय गणितज्ञों के नाम हैं—श्रीधर, भास्कराचार्य, वराहमिहिर, आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त और रामानुजम।

● प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के उद्देश्य

प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण का एक प्रमुख उद्देश्य बच्चों को इस योग्य बनाना है कि वे उन अंकीय एवं स्थानिक समस्याओं को शुद्धता और शीघ्रता के साथ हल कर सकें जो घर, विद्यालय एवं समुदाय में उनके समक्ष आती हैं। इस स्तर पर प्राथमिक गणित ऐसी होनी चाहिए जो बच्चों को उनके भौतिक जगत एवं निकटस्थ परिवेश से प्राप्त अनुभवों के माध्यम से आधारभूत गणितीय संकल्पनाओं की समझ के विकास में सहायता कर सके—

प्राथमिक स्तर पर गणित के पाठ्यक्रम द्वारा निम्नलिखित उद्देश्यों की पूर्ति होनी चाहिए—

- ◆ शीघ्रता एवं शुद्धता से परिकलन करने की योग्यता
- ◆ मापों की काफी हद तक सही अनुमान लगाने एवं आकलन करने की योग्यता
- ◆ तार्किक ढंग से सोचने की आवश्यकता
- ◆ क्रम एवं प्रतिरूप पहचानने की योग्यता
- ◆ दैनिक जीवन की साधारण समस्याएं हल करने में गणितीय संकल्पनाओं एवं कौशलों का प्रयोग करने की योग्यता
- ◆ किसी मौखिक विवरण को (क) समुचित प्रतीकों का प्रयोग करते हुए गणितीय शैली में और (ख) आरेखों में रूपांतरित करने की योग्यता

प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के उपर्युक्त उद्देश्यों के अतिरिक्त, सामाजिक पक्षों से संबंधित निम्नलिखित उद्देश्यों की पूर्ति का भी ध्यान रखा जाना चाहिए—

- प्रायोगिकी और मानव उद्यम के अन्य क्षेत्रों के उन्नयन में गणित के योगदान को सराहने की योग्यता,
- बैंकिंग, बीमा, कराधान जैसी संस्थाओं के सामाजिक महत्त्व का ज्ञान
- परिनिष्ठ उपकरणों में मापन कौशल के प्रयोग की योग्यता, और
- बुद्धिमान उपभोक्ता, निवेशक और समस्या समाधानकर्ता बनने की योग्यता।

● प्राथमिक स्तर पर गणित की पाठ्यचर्या

शिक्षार्थियों की सामाजिक और वैयक्तिक आवश्यकताओं की दृष्टि से बदलते राष्ट्रीय लक्ष्यों और प्राथमिकताओं के परिप्रेक्ष्य में गणित पाठ्यचर्या की प्रासंगिकता बनाए रखने के लिए उसमें निरन्तर परिवर्तन होना चाहिए। गणित पाठ्यचर्या की वर्तमान आलोचना यह है कि इसमें न तो शिक्षार्थियों की वैयक्तिक आवश्यकताओं का ध्यान रखा जाता है और न ही सामाजिक आवश्यकताओं का। इस समस्या को दूर करने के लिए प्राथमिक स्तर पर गणित में न्यूनतम अधिगम स्तर निर्दिष्ट किए गए हैं। निम्नलिखित अनुभाग में पाठ्यचर्या को प्रभावित करने वाले कारकों, उसके संगठन और गणित में न्यूनतम अधिगम स्तर के संदर्भ में गणित की पाठ्यचर्या का विवेचन किया जा रहा है।

● गणित की पाठ्यचर्या को प्रभावित करने वाले कारक

मानव संसाधन विकास का एक शक्तिशाली माध्यम शिक्षा है जिसे वांछित सामाजिक रूपान्तरण की प्रक्रिया में सहायक होना चाहिए। शिक्षा की विषय-वस्तु और प्रक्रिया का इस प्रकार विचारपूर्वक आयोजन किया जाना चाहिए जिससे वह सामाजिक सांस्कृतिक, राजनीतिक और आर्थिक एवं शिक्षाशास्त्रीय विचार-बिंदुओं के संदर्भ में शिक्षार्थी-व्यवहार में वांछनीय परिवर्तन ला सके।

● सामाजिक, सांस्कृतिक, राजनीतिक और आर्थिक विचार बिंदु

प्राथमिक स्तर पर गणित की विषय-वस्तु के चयन के लिए शिक्षा और अवसर की समानता, सांस्कृतिक विरासत का परिरक्षण, चरित्र निर्माण और मूल्यों का अन्तर्ग्रहण तथा भविष्योन्मुखी शिक्षा जैसे सामाजिक, सांस्कृतिक, राजनीतिक और आर्थिक विचार बिंदुओं को ध्यान में रखा जाता है।

● शिक्षाशास्त्रीय विचार बिंदु

गणित पाठ्यचर्या को यदि यथार्थ, संगत और अर्थपूर्ण होना है, तो आवश्यक है कि वह गणितीय विषय-वस्तु की प्रकृति और शिक्षाशास्त्रीय लक्ष्यों के अनुरूप हो। यह शिक्षार्थी की प्रकृति, अधिगम प्रक्रिया और शिक्षार्थियों के लिए गणित पाठ्यचर्या के प्रस्तुतीकरण के बारे में व्यवस्थित शोध पर आधारित होना चाहिए।

गणित पाठ्यचर्या की आयोजना के लिए निम्नलिखित मुद्दे विशेष रूप से संगत हैं—

- शिक्षार्थी की विकासात्मक आवश्यकताएं, उसका बौद्धिक विकास और विभिन्न स्तरों पर अधिगम की क्षमता
- बदलते समाज में गणित का स्थान
- बदलते संदर्भ में गणितीय ज्ञान की अधिक सारगर्भित व्याख्याएं
- प्राथमिक स्तर के अनुरूप गणित का नवीन ज्ञान
- गणित में अन्तर्निहित रुचि और चुनौतियां
- परंपरागत प्रकरणों का अनुकूलन या परिवर्तन
- सतत और व्यापक मूल्यांकन का प्रयोग तथा उपचारात्मक शिक्षा का प्रावधान
- परंपरागत प्रकरणों के समुन्नयन के लिए नवीन प्रकरणों का उपयोग

● गणित पाठ्यचर्या का संगठन

पाठ्यचर्या निर्माताओं के सामने कार्यक्रम के लिए चुनी गई विषय-वस्तु के संगठन की समस्या आती है। गणित में एक अन्तःनिर्मित और सुसंगत तर्क होता है जो पढ़ाई जाने वाली विषय सामग्री का अनुक्रम निर्धारित करता है। यह अंकों तथा अंक संक्रियाओं के लिए विशेष रूप से सत्य है। मापन से संबंधित प्रकरण और दैनिक जीवन की समस्याओं को सुलझाने में उनके अनुप्रयोग विषय-वस्तु के संगठन के लिए काफी व्यापक लचीलेपन के अवसर प्रदान करते हैं।

● विषय सामग्री का चयन

विषय सामग्री के चयन के लिए चार आधारभूत प्रक्रियाओं का प्रयोग किया जाता है—

1. निर्णयपरक प्रक्रिया
2. विश्लेषणात्मक प्रक्रिया
3. प्रयोगात्मक प्रक्रिया
4. सहमतिजन्य प्रक्रिया

● निर्णयपरक प्रक्रिया

निर्णयपरक प्रक्रिया अपेक्षाकृत समय हमारे सामने कई प्रश्न आते हैं जैसे—

- गणित शिक्षण के लक्ष्य और उद्देश्य क्या हैं? (ii) हमारे विद्यालयों में इन लक्ष्यों और उद्देश्यों की प्राप्ति किस सीमा तक हो रही है? (iii) वर्तमान स्थितियों में किस विषय सामग्री और किन अनुभवों से इन उद्देश्यों की प्राप्ति की सर्वाधिक संभावना है?

● विश्लेषणात्मक प्रक्रिया

इस प्रक्रिया में किसी व्यवसाय में कार्यरत व्यक्तियों के क्रिया-कलापों का अध्ययन किया जाता है। इसमें उनके द्वारा की जाने वाली क्रियाओं का विश्लेषण किया जाता है जिससे प्रयुक्त गणितीय विषय-वस्तु का पता लगाया जा सके। दैनिक जीवन की स्थितियों में गणित की उपयोगिता के अध्ययन के लिए विश्लेषणात्मक प्रक्रियाओं का व्यापक उपयोग किया जाता है।

● प्रयोगात्मक प्रक्रिया

जब हम गणित पाठ्यचर्या का निर्माण करते हैं, तो कई प्रश्न उठते हैं जैसे (i) क्या छोटे बच्चे गणित सीख सकते हैं? (ii) किस स्तर पर कौन-सी गणितीय विषय-वस्तु पढ़ाई जानी चाहिए? (iii) विनिर्दिष्ट आयु वर्ग के बच्चों के लिए किसी विशिष्ट विषय-वस्तु को किस सीमा तक व्यवहार में लाना चाहिए? (iv) क्या जल्दी और धीमी गति से सीखने वाले शिक्षार्थियों के लिए अलग-अलग विषय-वस्तु होनी चाहिए? इसी प्रकार के और भी कई प्रश्न उठते हैं।

● सहमतिजन्य प्रक्रिया

सहमतिजन्य प्रक्रिया में गणित पाठ्यचर्या के बारे में लोगों के विचार जानने की विधियां शामिल करते हैं। उनसे अन्तःक्रिया करते समय संबद्ध समस्याओं और मुद्दों पर विस्तृत चर्चा की जाती है ताकि निहित हितों, परम्परा और पूर्वाग्रहों के प्रभाव को कम से कम किया जा सके।

● पाठ्यचर्या विषय-वस्तु का श्रेणीकरण

गणित पाठ्यचर्या की विषय-वस्तु के चयन के बाद पाठ्यचर्या विषय-वस्तु के श्रेणीकरण का प्रश्न उठता है। विषय-वस्तु को विभिन्न श्रेणियों के लिए कई तरीकों से निर्दिष्ट किया जा सकता है। उनमें से एक तरीका शिक्षार्थियों की रुचि और परिपक्वता स्तर के अनुसार विषय-वस्तु का नियोजन करना है। दूसरा किसी विशेष कक्षा में विषय-वस्तु के नियोजन के बाद बच्चों को उस स्तर तक लाने का प्रयास करना है। तीसरे उपागम में प्रत्येक बच्चे की आवश्यकताओं और योग्यताओं की दृष्टि से विषय-वस्तु और क्रियाओं के अनुकूलन के लिए उद्देश्यों और लक्ष्यों को भी बदल दिया जाता है। इन उपागमों का अलग-अलग प्रयोग करने की अपेक्षा विषय-वस्तु के श्रेणी नियोजन के लिए संयुक्त रूप से इनका प्रयोग किया जाता है।

● प्राथमिक स्तर पर गणित-न्यूनतम अधिगम स्तर

प्राथमिक शिक्षा के सर्वव्यापीकरण के केन्द्र बिन्दु हैं- (क) सार्विक पहुँच- एक किलोमीटर की पैदल दूरी पर सभी शिक्षार्थियों के लिए प्राथमिक विद्यालय/ गैर औपचारिक शिक्षा-केन्द्र की उपलब्धता (ख) सार्विक प्रतिधारण-पाँच वर्ष की पूरी अवधि के लिए विद्यालय नेटवर्क में सभी बच्चों का प्रतिधारण (बने रहना) (ग) सार्विक नामांकन-6 से 11 वर्ष के आयु वर्ग के सभी बच्चों को विद्यालय नेटवर्क में लाना।

न्यूनतम अधिगम स्तर प्रलेख में शिक्षा के प्राथमिक स्तर की पाँचों कक्षाओं में से प्रत्येक के लिए प्रमुख गणितीय संकल्पनाओं को गणितीय दक्षताओं के निम्नलिखित पाँच क्षेत्रों में वर्गीकृत किया गया है -

- ◆ पूर्णांकों और संख्याओं को समझना।
- ◆ पूर्ण संख्याओं को जोड़ने, घटाने, गुणा व भाग करने की योग्यता।
- ◆ भिन्न, दशमलव एवं प्रतिशत का प्रयोग करने की योग्यता।
- ◆ मुद्रा, लंबाई, भार (वजन), धारिता, क्षेत्र एवं समय की इकाइयों का उपयोग करने और इनसे संबंधित दैनिक जीवन की साधारण समस्याओं को हल करने की योग्यता।
- ◆ ज्यामितीय आकारों एवं स्थानिक संबंधों को समझना।

● दक्षताओं के संदर्भ में पाठ्यचर्या

पाठ्यचर्या को अनेक तरीकों से विनिर्दिष्ट किया जा सकता है। इसे प्रत्येक श्रेणी के लिए आनुक्रमिक ढंग से प्रस्तुत गणितीय विषय-वस्तु के रूप में भी अभिव्यक्त किया जा सकता है। शिक्षा के प्राथमिक स्तर के अंत में शिक्षार्थियों द्वारा प्राप्त अपेक्षित अधिगम प्रतिफलों के रूप में इसका वर्णन किया जा सकता है।

● पूर्णदक्षता अधिगम उपागम

न्यूनतम अधिगम स्तरों को प्राथमिक स्तर पर शिक्षा की गुणवत्ता में सुधार की दृष्टि से प्रवर्तित किया गया है। इस गुणवत्ता की अपेक्षा तभी की जा सकती है जब कक्षा 1 से 5 तक के सभी शिक्षार्थी उनके लिए निर्धारित सभी दक्षताओं पर अधिकार प्राप्त कर लें अर्थात् शिक्षार्थी उनसे पूछे गए लगभग सभी प्रश्नों के उत्तर देने में सक्षम हों। संक्षेप में, किसी कक्षा की दक्षता विशेष पर तभी पूर्णाधिकार माना जायेगा जब कक्षा के कम से कम 80 प्रतिशत शिक्षार्थी 80 प्रतिशत दक्षता स्तर तक पहुँच गए हों। यह ध्यान रखें कि शेष 20 प्रतिशत शिक्षार्थियों को भी 80 प्रतिशत स्तर तक लाना है।

● सतत और व्यापक मूल्यांकन

शिक्षार्थी किसी विशिष्ट दक्षता का अर्जन तभी कर सकेगा जब उसने पूर्ववर्ती दक्षताओं पर पूर्णाधिकार प्राप्त कर लिया हो। अतः नवीन दक्षता का शिक्षण सभी या लगभग सभी शिक्षार्थियों द्वारा वर्तमान दक्षता पर पूर्णाधिकार प्राप्त कर लेने पर निर्भर करता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि मूल्यांकन सतत आधार पर होना चाहिए। वास्तविक व्यवहार में इसे शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया का अभिन्न अंग बनाया जाना चाहिए।

● गणित में दक्षता आधारित शिक्षण-अधिगम

दक्षता आधारित शिक्षण-अधिगम के लिए बाल-केन्द्रित उपागम को अपनाना होगा ताकि प्रत्येक बच्चे को पूर्णदक्षता स्तर तक लाया जा सके। इसके अतिरिक्त 6-11 वर्ष के आयु वर्ग के इन शिक्षार्थियों के लिए क्रिया-कलाप आधारित उपागम अनिवार्य है। तथापि, दक्षता के विकास के लिए चुने जाने वाले क्रिया-कलाप रोचक और सरल होने चाहिए। साथ ही यदि संभव हो तो तीव्र, मध्यम और मंद गति से सीखने वाले शिक्षार्थियों द्वारा भिन्न-भिन्न क्रिया-कलाप किए जाने चाहिए। इससे उन्हें अपनी-अपनी गति के अनुसार सीखने में मदद मिलेगी।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न : गणित अधिगम के पक्षों में सम्मिलित नहीं है-

- (a) प्रकार्यात्मक पक्ष (b) अनुशासनिक पक्ष
(c) सांस्कृतिक पक्ष (d) विकासात्मक पक्ष

उत्तर-(d)

उत्तर : विकासात्मक पक्ष गणित अधिगम पक्षों में सम्मिलित नहीं है जबकि गणित अधिगम के तीन पक्ष हैं- प्रकार्यात्मक, अनुशासनिक (विद्या शाखा) और सांस्कृतिक पक्ष।

प्रश्न : गणित अधिगम के तीनों पक्षों में से कौन-सा पक्ष वैज्ञानिक दृष्टिकोण के अन्तर्ग्रहण को प्रतिबिम्बित करता है?

- (a) प्रकार्यात्मक पक्ष (b) अनुशासनिक पक्ष
(c) सांस्कृतिक पक्ष (d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

उत्तर-(a)

उत्तर : गणित अधिगम के तीनों पक्षों में से प्रकार्यात्मक पक्ष वैज्ञानिक दृष्टिकोण के अन्तर्ग्रहण को प्रतिबिम्बित करता है।

प्रश्न : गणित अधिगम के प्रकार्यात्मक कार्यों में सम्मिलित नहीं है-

- (a) प्रतिशत/अनुपात (b) सारणी/ग्राफ
(c) रसबोध (d) सांख्यिकी

उत्तर-(c)

उत्तर : गणित अधिगम के प्रकार्यात्मक कार्यों में रसबोध सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न : कक्षा 1 से 5 तक गणित शिक्षण के उद्देश्यों में कौन सा सम्मिलित नहीं है?

- (a) शीघ्रता एवं शुद्धता से परिकलन करने की योग्यता
(b) सौन्दर्यशास्त्र का अभिज्ञान
(c) तार्किक ढंग से सोचने की योग्यता
(d) क्रम एवं प्रतिरूप पहचानने की योग्यता

उत्तर-(b)

उत्तर : कक्षा 1 से 5 तक गणित शिक्षण के उद्देश्यों में सौन्दर्यशास्त्र का अभिज्ञान सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न : कक्षा एक से पाँच तक गणित की विषय-वस्तु के लिए सामाजिक, सांस्कृतिक एवं राजनीतिक बिंदुओं में कौन सा सम्मिलित नहीं है-

- (a) शिक्षा और अवसर की समानता (b) सांस्कृतिक विरासत का परिष्करण
(c) परंपरागत प्रकरणों का अनुकूलन (d) भविष्योन्मुखी शिक्षा

उत्तर-(c)

उत्तर : कक्षा 1 से 5 तक गणित की विषय-वस्तु के लिए सामाजिक, सांस्कृतिक एवं राजनीतिक बिंदुओं में परंपरागत प्रकरणों का अनुकूलन सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न : गणित की विषय-वस्तु के चयन के लिए शिक्षाशास्त्रीय विचार बिंदुओं में कौन सा सम्मिलित नहीं है?

- (a) प्राथमिक स्तर के अनुरूप गणित का नवीन ज्ञान
(b) गणित में अन्तर्निहित रुचि और चुनौतियाँ
(c) सतत और व्यापक मूल्यांकन का प्रयोग
(d) चरित्र निर्माण और मूल्यों का अन्तर्ग्रहण

उत्तर-(d)

उत्तर : चरित्र निर्माण एवं मूल्यों का अन्तर्ग्रहण गणित की विषय-वस्तु के चयन के लिए शिक्षाशास्त्रीय विचार बिंदुओं में सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न : गणित की विषय सामग्री के चयन के लिए जिस आधारभूत प्रक्रिया का प्रयोग नहीं किया जाता है, वह है—

- (a) परंपरागत प्रक्रिया (b) निर्णयपरक प्रक्रिया
(c) विश्लेषणात्मक प्रक्रिया (d) प्रयोगात्मक प्रक्रिया

उत्तर—(a)

उत्तर : परंपरागत प्रक्रिया का प्रयोग गणित विषय सामग्री के चयन के लिए नहीं किया जा सकता है।

प्रश्न : कक्षा एक से पांच तक गणित में न्यूनतम अधिगम स्तर सार्विक नामांकन की उम्र सीमा क्या है?

- (a) 7-12 वर्ष (b) 6-11 वर्ष (c) 8-13 वर्ष (d) 5-10 वर्ष

उत्तर—(b)

उत्तर : कक्षा 1 से 5 तक गणित में न्यूनतम अधिगम स्तर सार्विक नामांकन की उम्र सीमा 6-11 वर्ष है।

प्रश्न : कक्षा एक से पांच तक न्यूनतम अधिगम स्तर की पहचान के लिए 1990 में मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार द्वारा किसकी अध्यक्षता में एक समिति गठित की गई थी?

- (a) प्रो. आर. एच. दवे (b) प्रो. गाडगिल
(c) प्रो. एस. एच. दवे (d) प्रो. महालनोबिस

उत्तर—(a)

उत्तर : वर्ष 1990 में मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार द्वारा कक्षा एक से पांच तक न्यूनतम अधिगम स्तर की पहचान के लिए प्रो. आर.एच. दवे की अध्यक्षता में एक समिति का गठन किया गया।

प्रश्न : प्राथमिक स्तर (कक्षा एक से पांच) पर प्राथमिक शिक्षा के सर्वव्यापीकरण के केन्द्र बिन्दु में सम्मिलित नहीं है—

- (a) सार्विक पहुंच (एक किमी. पहुंच तक सभी शिक्षार्थियों के लिए प्राथमिक विद्यालय की उपलब्धता)

(b) सार्विक नामांकन

(c) सार्विक प्रतिधारण

(d) सार्विक निरपेक्षता

उत्तर—(d)

उत्तर : सार्विक निरपेक्षता को प्राथमिक स्तर पर प्राथमिक शिक्षा के सर्वव्यापीकरण के केंद्र बिंदु में सम्मिलित नहीं किया गया है।

प्रश्न : किस राष्ट्रीय शिक्षा नीति में सार्विक प्राथमिक शिक्षा में एक अन्य आयाम सार्विक संप्राप्ति जोड़ा गया?

- (a) मुक्त शिक्षा कार्यक्रम, 1979
(b) राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986
(c) सर्वशिक्षा अभियान, 2001
(d) महिला शिक्षा और सशक्तिकरण, 2009

उत्तर—(b)

उत्तर : राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986 में सार्विक प्राथमिक शिक्षा में एक अन्य आयाम सार्विक संप्राप्ति जोड़ा गया।

प्रश्न : न्यूनतम अधिगम स्तर प्रलेख में गणितीय दक्षताओं के पांच क्षेत्रों में सम्मिलित नहीं हैं—

- (a) पूर्णांकों और संख्याओं को समझना
(b) भिन्न, दशमलव एवं प्रतिशत प्रयोग की योग्यता
(c) ज्यामितीय आकारों एवं स्थानिक संबंधों को समझना
(d) सहमतिजन्य योग्यता

उत्तर—(d)

उत्तर : सहमतिजन्य योग्यता न्यूनतम अधिगम स्तर प्रलेख में गणितीय दक्षताओं के क्षेत्रों में सम्मिलित नहीं किया गया।

□ प्राइमरी गणित : पाठ आयोजना

● प्रस्तावना

आप इस बात से सहमत होंगे कि किसी भी क्रिया की सफलता उसकी आयोजना पर निर्भर करती है। क्रियाओं की समुचित आयोजना से ही लाभदायक परिणाम प्राप्त होते हैं। यही बात शिक्षण के लिए भी सत्य है। शिक्षक होने के कारण आपको किसी कक्षा को गणित पढ़ाने का दायित्व सौंपा गया है। आपको अपना पाठ्यक्रम निर्धारित समय-सीमा में पूरा करना होगा और बच्चों में प्रभावी अधिगम को भी सुनिश्चित करना होगा। अब आपके सम्मुख इसे सफलतापूर्वक पूर्ण करने की चुनौती है। इसका विचार मात्र ही पाठ्यचर्या के मद्दों के क्रम निर्धारण, व्यवस्था, प्रबंध और वर्गीकरण तथा निर्धारित समय-सीमा के साथ तालमेल और बच्चों के साथ की जाने वाली उपयुक्त क्रियाओं के अभিনিर्धारण के संबंध में आत्मचिंतन की प्रक्रिया को उत्प्रेरित करेगा। यह सब शिक्षण के लिए आयोजना ही है।

उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप,

- ◆ इकाई और पाठ आयोजना की आवश्यकता और महत्त्व को पहचान सकेंगे।
- ◆ इकाई आयोजना के विविध चरणों की सूची बना सकेंगे।
- ◆ दी गई किसी एक इकाई के शिक्षण के लिए इकाई योजना का निर्माण कर सकेंगे।
- ◆ पाठ आयोजना के विविध चरणों को सूचीबद्ध कर सकेंगे।
- ◆ गणित पाठों के शिक्षण के लिए पाठ योजनाओं का निर्माण कर सकेंगे।

● इकाई आयोजना

गणित की पाठ्यचर्या आपको विषय-वस्तु/संकल्पनाओं या दक्षताओं के रूप में उपलब्ध हो सकती है। अतः गणितीय विषय-वस्तु और प्रक्रियाओं के क्रियान्वयन के संबंध में बच्चों में बोध और कौशलों के अर्जन को सुनिश्चित करना आपका लक्ष्य होना चाहिए। दूसरे शब्दों में आपका उद्देश्य अपने शिक्षार्थियों में गणितीय संकल्पनाओं का विकास करना होगा। आपको शायद याद हो कि 'प्राथमिक स्तर पर न्यूनतम अधिगम स्तर' शीर्षक वाले प्रलेख में आवश्यक दक्षताओं को गणितीय अधिगम के पांच प्रमुख क्षेत्रों के अन्तर्गत सूचीबद्ध किया गया है।

● इकाई आयोजना का अर्थ

गणित की इकाई में अन्तःसम्बद्ध अनेक दक्षताओं/संकल्पनाओं/विषय-वस्तु का एक खंड समाविष्ट होता है जिसके कुछ सामान्य आधार या अभिलक्षण होते हैं। अतः गणितीय अधिगम के किसी भी क्षेत्र के अन्तर्गत अनेक इकाइयां बनाई जा सकती हैं। दक्षताओं/विषय-वस्तु की प्रकृति, गणित शिक्षण के बारे में शिक्षक का अनुभव और छात्रों की अधिगम शैलियों के बारे में अपने प्रत्यक्षण के आधार पर कोई शिक्षक इकाइयों के निरूपण के बारे में निर्णय ले सकता है।

गणितीय दक्षताओं को श्रेणीकृत रूप से व्यवस्थित करने और कक्षा क्रियान्वयन के प्रयोजनों के लिए विभाजित कर लेने के बाद आपको उसे बच्चों तक संप्रेषित करने के तरीकों के विषय में सोचना होगा। स्पष्टतः इसके लिए आपको किसी इकाई के अन्तर्गत पाठों के अनुक्रम, शिक्षण विधि,

अनुदेशन सहायक सामग्री, शिक्षार्थी क्रियाएं और मूल्यांकन प्रक्रिया के बारे में विचार करना पड़ेगा। इस निश्चय की व्यवस्थित प्रस्तुति ही इकाई योजना में प्रतिफलित होगी।

इकाई आयोजना की आवश्यकता और महत्व—आप जानना चाहेंगे कि हमें इकाई योजना की क्या आवश्यकता है अथवा क्या हम इकाई योजना के बिना काम नहीं चला सकते? इसका उत्तर निम्न बिन्दुओं के तहत स्पष्ट किया गया है कि इकाई आयोजना से शिक्षक का कार्य किस प्रकार सरल और प्रभावी रीति से हो जाता है—

- इससे शिक्षकों को शिक्षण-अधिगम की समग्र दृष्टि प्राप्त होती है जिससे उन्हें उपलब्ध समय और संसाधनों की व्यवस्था में सहायता प्राप्त हो सकती है।
- यह पाठ्य पुस्तक की विषय-वस्तु के कक्षा में अधिगम के लिए ली जाने वाली दक्षताओं से सहसंबंध स्थापित करने के अवसर प्रदान करती है।
- यह पाठ्यक्रम की विषय-वस्तु के विविध पक्षों या संदर्भगत दक्षता पर संतुलित बल देने में सहायता करती है।
- यह शिक्षार्थियों के इकाईवार मूल्यांकन और आवश्यकतानुसार उपचारात्मक शिक्षण की व्यवस्था और समुन्नयन उपाय करने में सहायक हो सकती है।

इकाई आयोजना के चरण—इकाई आयोजना में दो प्रक्रियाएं शामिल हैं—अनुक्रमण और चयन। बच्चों के प्रभावी अधिगम को सुनिश्चित करना इकाई आयोजना का केन्द्र बिन्दु होना चाहिए। इकाई निर्माण की संपूर्ण प्रक्रिया को अन्तर्ज्ञानात्मक तरीकों पर नहीं छोड़ा जा सकता है। अतः इस संबंध में नीचे सुझाए गए कुछ चरण उपयोगी होंगे—

- वार्षिक पठन-पाठन के दौरान कक्षा के लिए संपूर्ण पाठ्यक्रम विषय-वस्तु/दक्षता समुच्चय का आकलन,
- शिक्षकों के लिए उपलब्ध शिक्षण समय का आकलन,

- दी गई पाठ्यक्रम विषय-वस्तु/दक्षता समुच्चय का शिक्षण-अधिगम अनुक्रम में व्यवस्थापन,
- पाठ्यक्रम विषय-वस्तु/दक्षताओं के अन्तर्संबंधित पक्षों की पहचान,
- सम्पूर्ण पाठ्यक्रम विषय-वस्तु दक्षताओं का इकाइयों में वितरण, जिसके लिए आपको निम्नलिखित बातों पर ध्यान देना होगा—
 - इकाई न तो बहुत छोटी होनी चाहिए और न ही लंबी,
 - इकाई के अपने घटकों के बीच कुछ सामान्य तत्व होने चाहिए,
 - इकाई ऐसी होनी चाहिए कि कक्षा में उसे पूरा करने के लिए एक महीने से अधिक समय न लगे, तथा प्रत्येक सूचीबद्ध इकाई को आगे शिक्षण पाठों में विभाजित करना अपेक्षित होगा,
- इन निश्चयों और विभाजन का सारणी रूप में प्रस्तुतीकरण, जिसे इकाई योजना माना जा सके।

इकाई योजना का निर्माण—इकाई योजना का निर्माण विभिन्न व्यक्तियों द्वारा विभिन्न प्रकार से किया जा सकता है। किन्तु इकाई योजना बनाते समय बच्चों में दक्षता का विकास ही मुख्य ध्यातव्य बिंदु होना चाहिए। इकाई आयोजना का एक तरीका यह हो सकता है कि किसी कक्षा को दस महीने की अवधि में किसी क्षेत्र के अन्तर्गत दी गई जितनी दक्षताएं पढ़ाना है उनका क्षेत्रानुसार योजनागत विभाजन कर लिया जाए। अतः सैद्धान्तिक रूप से कहा जा सकता है कि कम से कम पांच इकाइयां हों और प्रत्येक इकाई एक-एक क्षेत्र पर केन्द्रित हो। किंतु ऐसा करना व्यावहारिक नहीं होगा, क्योंकि प्रत्येक दक्षता वर्ग, दक्षताओं की संख्या काफी ज्यादा है इसलिए आगे भी विभाजन की आवश्यकता होगी। व्यावहारिक कारणों से प्रत्येक क्षेत्र में 10 से अधिक दक्षताएं नहीं होनी चाहिए और उन्हें पढ़ाने के लिए 20 कार्यदिवसों से अधिक समय लगाने की योजना नहीं होनी चाहिए।

इकाई योजना

इकाई योजना संख्या..... शिक्षक का नाम.....

विषय : गणित

वर्ग-I (पूर्णांकों और संख्याओं का बोध):

दक्षताएं : 1.3.1 (100 से 1000 तक के संख्याओं की पहचान और लिखना) 1, 3, 2 (1 से 1000 तक गिनती लिखना)						
क्रम संख्या	दक्षता	पाठ संख्या	शिक्षण विधि	शिक्षण उपकरण	शिक्षार्थी क्रियाएं	मूल्यांकन
1.	1.3.1 (क) 100 से 999 तक के संख्यांक पहचानता है (ख) 1000 तक के संख्यांक पहचानता है (ग) 100 से 1000 तक के संख्यांक लिखता है	1 से 3 3 4	लेखविधि और निदर्शन विधि वही वही	फलैश कार्ड वही वही	विभिन्न खेल और समूह कार्य वही वही	मौखिक परीक्षण वही मौखिक और लिखित परीक्षण
2.	1.3.2 1 से 1000 तक गिनती लिखना	5 से 6	वही	वही	वही	मौखिक और लिखित परीक्षण

● पाठ आयोजना

जी. एच. ग्रीन के अनुसार, जिस शिक्षक ने अपने विषय और अपनी कक्षा से संबंधित पाठ को बुद्धिमत्तापूर्ण ढंग से आयोजित कर लिया है, वह बिना किसी चिंता के अत्यंत आत्मविश्वास के साथ अपने कार्य को पूरी तरह समझते हुए उसे व्यावहारिक अंजाम तक पहुंचाने में समर्थ होगा क्योंकि वह आने वाली कठिनाइयों का पूर्वानुमान कर चुका होता है और उसने स्वयं को उनका सामना करने के लिए तैयार कर लिया होता है।

● पाठ आयोजना का अर्थ

पाठ आयोजना शिक्षक द्वारा कक्षा में किए जाने वाले कार्य के विविध चरणों की विस्तृत रूपरेखा प्रस्तुत करती है। अतः पाठ आयोजना एक कालांश में शिक्षण से संबद्ध होती है। पाठ आयोजना का अर्थ कक्षा में शिक्षण के लिए किसी पाठ के अनुक्रम और प्रस्तुतीकरण की शैली तथा प्रयोग में लाई जाने वाली मूल्यांकन प्रक्रिया का अभिनिर्धारण है। अतः यह एक ऐसी अग्रिम योजना है जो एक कालांश में किसी शिक्षण-कार्य के 'क्यों', 'क्या' और 'कैसे' के बीच संबंध स्थापित करती है।

● पाठ आयोजना की आवश्यकता और महत्त्व

जब आप कक्षा में किसी पाठ को पढ़ाने के लिए जाते हैं, तो उसके लिए तैयारी करके जाते हैं, चाहे वह तैयारी अनौपचारिक ही क्यों न हो। पर कभी-कभी आपको यह लगता है कि आप तैयार की गई सारी विषय-वस्तु का शिक्षण नहीं कर पाए, या दूसरी ओर शिक्षणार्थ ली गई विषय-वस्तु पूरे कालांश के लिए पर्याप्त नहीं थी। कभी-कभी आप शिक्षण के दौरान अटक जाते हैं और परेशान हो उठते हैं। हो सकता है कि आप पाठ के शिक्षण उद्देश्यों से अवगत न हों इसलिए आपने उनकी प्राप्ति की कोई प्रवाह नहीं की। पाठ आयोजना करते समय आपको इन सभी समस्याओं के बारे में पहले से सोचने और संभावित अवरोधों के लिए संशोधक उपाय करने का अवसर मिलता है।

पाठ आयोजना शिक्षक की निम्नलिखित रूपों में मदद करती हैं—

- ◆ यह शिक्षण को योजनाबद्ध और सुव्यवस्थित बनाती है।
- ◆ यह पाठ के लिए पर्याप्त विषय-वस्तु की पहचान करने और उसके उपयुक्त क्रमायोजन करने में शिक्षक की सहायता करती है।
- ◆ यह बच्चों की अधिगम संबंधी कठिनाइयों का पूर्वानुमान लगाने और उन्हें सुलझाने में शिक्षक की सहायता करती है।
- ◆ यह शिक्षक को इस योग्य बनाती है कि वह उपलब्ध समय का समुचित प्रयोग कर सके।
- ◆ यह बच्चों की अधिगम आवश्यकताओं और योग्यताओं के बारे में अन्तर्दृष्टि विकसित करने में सहायता प्रदान करती है।
- ◆ यह शिक्षक में तात्कालिक संशोधक उपाय अपनाने की आदत विकसित करने में सहायक होती है।
- ◆ यह शिक्षण के दौरान शिक्षक को आत्मविश्वासी बनाती है।

● पाठ आयोजना की प्रणालियां

पाठ की आयोजना अनेक प्रकार से की जा सकती है, इसलिए अनेक प्रणालियां विकसित की गई हैं। हरबर्टीय प्रणाली सर्वाधिक उपयुक्त प्रणाली है। हरबर्टीय प्रणाली में पाठ आयोजना के चरण निम्नलिखित हैं—

1. प्रस्तावना
2. प्रस्तुतीकरण

3. साहचर्य (या तुलना)

4. सामान्यीकरण

5. अनुप्रयोग

6. पुनरावृत्ति, और

7. गृहकार्य

● अच्छी पाठ योजना की विशिष्टताएं

- ◆ पाठ आयोजना के माध्यम से शिक्षक अपने लिए पाठ विशेष के शिक्षण उद्देश्य को सुनिर्दिष्ट कर सकेगा।
- ◆ इससे शिक्षक को यह पता चल जाता है कि क्या उपलब्ध विषय-वस्तु कालांश के दौरान क्रियान्वयन के लिए पर्याप्त है।
- ◆ शिक्षक पहले से ही शिक्षार्थियों द्वारा की जाने वाली क्रियाओं को पहचान लेता है।
- ◆ शिक्षक शिक्षार्थियों के संभावित उत्तरों का पूर्वानुमान लगा लेता है।
- ◆ योजना न तो अधिक छोटी और न ही अधिक लंबी होनी चाहिए।
- ◆ छोटे बच्चों के लिए आयोजित क्रिया-कलाप पर्याप्त रोचक होने चाहिए।
- ◆ इसे बच्चों में रहने की प्रवृत्ति पर केन्द्रित न होकर उनमें स्पष्ट बोध के विकास पर केन्द्रित होना चाहिए।

● पाठ योजना निर्माण

पाठ आयोजना के चरणों और पूर्ववर्ती अनुभागों में विवेचित विधियों को ध्यान में रखते हुए पाठ योजनाओं का निर्माण किया जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरण पाठ आयोजना के कुछ उपागमों को निर्देशित करेंगे। आप वांछित दक्षता और पूर्वानुमानित शिक्षण-अधिगम स्थिति के अनुरूप इन्हें अपनाकर पाठ योजनाओं का निर्माण करना सीख सकते हैं—

पाठ योजना

विद्यालय का नाम : क ख ग	तिथि : 13/09/2018
कक्षा : तृतीय	अवधि : 40 मिनट
विषय : गणित	कालांश : II
प्रकरण : तीन अंकों की	दक्षता : शिक्षार्थी तीन अंकों
संख्याओं का	के संख्याओं में अंकों का
स्थानीय मान	स्थानीय मान बता सकेंगे।

● पाठ के सामान्य उद्देश्य :

संख्याओं में अंकों के स्थानीय मान का बोध विकसित करना।

● पाठ के विशिष्ट उद्देश्य :

शिक्षार्थी तीन अंकों वाली संख्याओं में अंकों का स्थानीय-मान बता सकेंगे।

शिक्षण/अनुदेशन सामग्री : ◆ सामान्य कक्षा सामग्री

◆ स्पाइक ऐबेकस (गिनतारा)

◆ इकाई, दहाई, सैकड़ों में चिह्नित तीन अंकों की संख्याएं दर्शाता चार्ट

◆ तीन अंकों की संख्याओं युक्त फ्लैश कार्ड

पूर्वज्ञान : (i) शिक्षार्थी 1 से 1000 तक की संख्याएं पहचानते और लिखते हैं।

(ii) शिक्षार्थी दो अंकों की संख्या में अंकों का स्थानीय मान बताते हैं।

(iii) शिक्षार्थी तीन अंकों की संख्याओं के नाम लिखते हैं।

● प्रस्तावना :

शिक्षक शिक्षार्थियों से कुछ प्रश्न पूछेगा :

(श्यामपट्ट पर दो अंकों की कुछ संख्याएं लिखते हुए)

1. श्यामपट्ट पर कौन-सी संख्याएं लिखी हैं? 34, 40, 39
 2. 34 में कौन-सी संख्या इकाई को दर्शाती है?
 3. 34 में कौन-सी संख्या दहाई को प्रस्तुत करती है?
 4. 34 में संख्यांक 4 का स्थानीय-मान क्या है?
 5. 34 में संख्यांक 2 का स्थानीय-मान क्या है?
- (शिक्षक संख्यांक 40 और 39 के लिए भी इसी प्रकार के प्रश्न पूछ सकता है)
6. 346 में 3 का स्थानीय-मान क्या है?

उद्देश्य कथन : बच्चों आज हम 3 अंकों की संख्याओं में संख्याओं के स्थानीय-मान का अध्ययन करेंगे।

● शिक्षक-शिक्षार्थी क्रियाएं

(3 अंकों की संख्याओं वाला फ्लैश कार्ड दिखाते हुए)

1. फ्लैश कार्ड पर कौन-सा संख्यांक दर्शाया गया है?

2. इस संख्या (346) के लिए संख्या नाम लिखिए (तीन सौ छियालिस) (संख्यांक 3 को छुपाते हुए)
3. अब कौन-सा संख्यांक बचा है? (छियालिस) (फिर से फ्लैश कार्ड दिखाते हुए)
4. दाहिनी ओर से तीसरे स्थान पर कौन-सा संख्यांक है? (संख्यांक 6 को उनकी संख्या 346 और 46 से पढ़ते हुए संख्याओं की तुलना करने के लिए कहना)
5. 46 की तुलना में 346 बोलते हुए आपको उसके (46 के) अतिरिक्त और क्या बोलना पड़ा?

● शिक्षक कथन

(आपको दाहिनी ओर से तीसरे स्थान पर संख्यांक 3 की स्थिति के कारण तीन सौ कहना पड़ता है)

शिक्षक अब तीन अंकों की संख्याओं के 3-4 उदाहरण लेगा और शिक्षार्थियों को सहभागी बनाते हुए स्थानीय मान का चार्ट भरवाएगा।

3 अंकों के संख्यांक	स्थानीय मान					
	सैकड़ा		दहाई		इकाई	
	संख्यांक	स्थानीय मान	संख्यांक	स्थानीय मान	संख्यांक	स्थानीय मान
346	3	300	4	40	6	6
859	8	800	5	50	9	9
583	5	500	8	80	3	3
708	7	700	0	00	8	8

यदि शिक्षार्थियों को कठिनाई महसूस हो रही हो, तो शिक्षक फ्लैश कार्डों का प्रयोग करते हुए चार्ट पर आगे और चर्चा करें। शिक्षार्थियों की सहायता के लिए नीचे दिखाया गया एक अन्य व्याख्यात्मक चार्ट निर्मित किया जा सकता है।

3 अंकों के संख्यांक	स्थानीय मान								
	दाईं ओर से तीसरा स्थान			दाईं ओर से दूसरा स्थान			दाईं ओर से पहला स्थान		
	संख्यांक	स्थान	स्थानीय मान	संख्यांक	स्थान	स्थानीय मान	संख्यांक	स्थान	स्थानीय मान
864	8	सैकड़ा	$8 \times 100 = 800$	6	दहाई	$6 \times 10 = 60$	4	इकाई	$4 \times 1 = 4$
662	6	सैकड़ा	$6 \times 100 = 600$	6	दहाई	$6 \times 10 = 60$	2	इकाई	$2 \times 1 = 2$
508	5	सैकड़ा	$5 \times 100 = 500$	0	दहाई	$0 \times 10 = 00$	8	इकाई	$8 \times 1 = 8$
320	3	सैकड़ा	$3 \times 100 = 300$	2	दहाई	$2 \times 10 = 20$	0	इकाई	$0 \times 1 = 0$

● सामान्यीकरण

शिक्षक उपर्युक्त उदाहरणों के आधार पर निम्नलिखित के सामान्यीकरण में बच्चों की सहायता करें -

- (i) दाहिनी ओर से पहले स्थान पर अंक का स्थानीय-मान उसी अंक से दर्शाया जाता है।
- (ii) दाहिनी ओर से दूसरे स्थान पर अंक का स्थानीय-मान उस अंक का दस गुना होता है।
- (iii) दाहिनी ओर से तीसरे स्थान पर अंक का स्थानीय-मान उस अंक का सौ गुना होता है।

(vi) जैसे-जैसे हम दाहिनी ओर से बाईं ओर बढ़ते हैं संख्यांक में अंकों का स्थानीय-मान दस गुना बढ़ जाता है।

3 का स्थानीय मान

23 में 3 का स्थानीय मान 3 है।

34 में 3 का स्थानीय मान 3×10 है।

347 में 3 का स्थानीय मान 3×100 है।

● पुनरावृत्ति :

1. 128 में 2 का स्थानीय-मान क्या है?

उत्तर: 20

2. 12 में 2 का स्थानीय-मान क्या है?

उत्तर: 2

3. 247 में 2 का स्थानीय-मान क्या है?

उत्तर: 200

4. 854 में संख्याओं के स्थानीय-मान बताइये।

उत्तर:

संख्यांक	स्थानीय-मान
8	800
5	50
4	4

● गृह कार्य :

3 अंकों की निम्नलिखित संख्याओं 292, 308, 887, 658 में अंकों के स्थानीय-मान बताइये।

पाठ योजना-2

विद्यालय का नाम : क ख ग तिथि : 14/09/2018

कक्षा : पांचवीं अवधि : 40 मिनट

विषय : गणित कालांश : तीसरा

प्रकरण : घनाभ का आयतन

दक्षता : शिक्षार्थी घनाभ के आयतन का परिकलन करते हैं।

पाठ के सामान्य उद्देश्य : शिक्षार्थियों में चिंतन और तर्कशक्ति का विकास करना।

पाठ के विशिष्ट उद्देश्य :

- शिक्षार्थी आयतन की संकल्पना को समझ सकेंगे।
- शिक्षार्थी घनाभ के आयतन का सूत्र जान सकेंगे।
- शिक्षार्थी घनाभ के आयतन के सूत्र को संगत समस्याओं पर लागू कर सकेंगे।

● प्रस्तुतीकरण

शिक्षक-शिक्षार्थी क्रियाएं	
1 सेमी. घन दिखाते हुए (लम्बा, चौड़ा, मोटा)	- इस ठोस की विमाएं क्या हैं? - घन और घनाभ में क्या अन्तर है? - इसकी आकृति कैसी है? शिक्षक कथन ‘इसे घन कहते हैं।’ घन की तीनों विमाएं एक समान होती हैं जबकि घनाभ में ये अलग-अलग हो सकती हैं?
1 सेमी. घन दिखाते हुए	- इस घन का आयतन क्या है? ‘आइये इसे अंशांकित सिलिण्डर की सहायता से मापें’ जल स्तर का प्रारंभिक पठन किया जायेगा और फिर ठोस को उसमें डुबाया जायेगा। पानी एक घन सेमी. बढ़ जाएगा। - इस घन की विमाएं क्या हैं? उत्तर : लंबाई = 1 सेमी., चौड़ाई = 1 सेमी., ऊंचाई = 1 सेमी
साबुन का घनाभ दिखाते हुए	- इस घन का आयतन क्या है? - इस घनाभ की विमाएं क्या हैं? - इसकी लम्बाई, चौड़ाई और मोटाई को क्रमशः कितने भागों में बांटा गया है? उत्तर : एक घन सेमी. है। (एक घन सेमी. आयतन की इकाई माना जाता है।) उत्तर : लम्बाई = 6 सेमी., चौड़ाई = 4 सेमी., ऊंचाई = 3 सेमी. उत्तर-(i) लंबाई को छः भागों में बांटा गया है।

● शिक्षण/अनुदेशन सामग्री :

- सामान्य कक्षा सामग्री
- वर्ग और आयत के आरेख वाला चार्ट
- विभिन्न विमाओं के दो घनाभ
- घनाभाकार आकृति का एक डिब्बा
- अंशांकित सिलिण्डर
- किसी ठोस घन का एक सेंटीमीटर का टुकड़ा

● पूर्व ज्ञान

शिक्षार्थी वर्ग और आयत के क्षेत्रफल की संकल्पना जानते हैं।

● प्रस्तावना :

उनके पूर्व ज्ञान परीक्षण और उन्हें नए पाठों के लिए तैयार करने के लिए निम्नलिखित प्रश्न पूछे जाएंगे:-

- (चार्ट में वर्ग का आरेख दिखाते हुए) आप इस आरेख का क्षेत्रफल कैसे निकालेंगे?
- (आयत का आरेख दिखाते हुए) आप इस आरेख का क्षेत्रफल कैसे निकालेंगे?
- (टीन का डिब्बा दर्शाते हुए) यदि आपको यह बताना हो कि टीन के इस डिब्बे में कितना तेल आ सकता है, तो आप कैसे बतायेंगे?
- टीन के डिब्बे या टंकी में कितना स्थान है?
- यदि आप कहना चाहते हैं कि टंकी में इतना पानी आ सकता है, तो आप कैसे बताएंगे?
- (घनाभ दिखाते हुए) आप इस ठोस को क्या नाम देंगे?
- आप इस घनाभ का स्थान या आयतन कैसे ज्ञात करेंगे?

● उद्देश्य कथन

शिक्षार्थी अंतिम प्रश्न का उत्तर नहीं दे पाएंगे और शिक्षक कहेगा, “आज हम घनाभ का आयतन निकालने की विधि ज्ञात करेंगे।” साथ ही साथ उद्देश्य श्यामपट्ट पर लिखा जाएगा।

(ii) चौड़ाई को 4 भागों में बांटा गया है।

(iii) लंबाई को 3 भागों में बांटा गया है।

शिक्षक इस घनाभ को विभाजक रेखाओं के साथ तुरन्त काटेगा। (इससे 72 भाग प्राप्त होंगे).....(i)

9. प्रत्येक छोटे भाग की आकृति क्या है?

उत्तर-घन है।

10. इस छोटे घन की विमाएं क्या हैं?

उत्तर-लंबाई : 1 सेमी., चौड़ाई : 1 सेमी., मोटाई : 1 सेमी.

11. इस छोटे घन का आयतन क्या है?

उत्तर-एक घन सेमी. है।

(शिक्षार्थियों को पहले दिखाए गए समान घन से इस घन की तुलना की जाएगी)

12. पूरे घनाभ का आयतन क्या है?

उत्तर-घनाभ का आयतन

= 30 घन सेमी. है।(ii)

● सामान्यीकरण

1. पहली स्थिति में विमाएं क्या हैं?

लंबाई = 6 सेमी.

चौड़ाई = 4 सेमी.

मोटाई या ऊंचाई = 3 सेमी.

2. इस स्थिति में आयतन क्या है? उत्तर :- आयतन = $6 \times 4 \times 3 = 72$ घन सेमी.

3. आयतन और विमाओं में क्या संबंध है? उत्तर:- आयतन इन तीनों विमाओं का गुणनफल है।

घनाभ का आयतन = लंबाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊंचाई

● पुनरावृत्ति :

1. आयतन से आपका क्या अभिप्राय है?

2. घन और घनाभ में क्या अन्तर है?

3. घनाभ के आयतन का सूत्र क्या है?

4. विभिन्न स्थितियों में आयतन ज्ञात करने की क्या आवश्यकता है?

● गृहकार्य :

1. आपकी कक्षा में हवा का आयतन क्या होगा यदि उसकी विमाएं निम्नलिखित हों;

लंबाई = 7 मी.

चौड़ाई = 6 मी.

ऊंचाई = 3.5 मी.

● पाठ आयोजना की परिसीमाएं

- ◆ यह शिक्षण को व्यवस्थित परंतु अनम्य बनाती है।
- ◆ इस पर अत्यधिक बल पाठ को नेमी बना सकता है।
- ◆ यह प्रारंभिक शिक्षकों के लिए अच्छा है। अनुभवी शिक्षक संरक्षित कक्षा व्यवहारों में सामान्यतः कम निष्ठा रखते हैं।
- ◆ इसका कठोरता से पालन किया जाए, तो शिक्षक के लिए नई सूझों की कोई गुंजाइश नहीं रहती।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. किसी इकाई के अन्तर्गत पाठों के अनुक्रम, शिक्षण विधि, अनुदेशन सहायक सामग्री, शिक्षार्थी क्रियाएं और मूल्यांकन प्रक्रिया इस निश्चय की व्यवस्थित प्रस्तुति कहलाती है-

- (a) इकाई योजना (b) पाठ योजना
(c) सामान्य योजना (d) प्रस्तुतीकरण

उत्तर-(a)

उत्तर : किसी इकाई के अंतर्गत पाठों के अनुक्रम, शिक्षण विधि, अनुदेशन सहायक सामग्री, शिक्षार्थी क्रियाएं और मूल्यांकन प्रक्रिया की व्यवस्थित प्रस्तुति इकाई योजना कहलाती है।

प्रश्न 2. इकाई आयोजना के चरणों में सम्मिलित नहीं है-

- (a) वर्ष के दौरान कक्षा के लिए संपूर्ण पाठ्यक्रम विषय-वस्तु/दक्षता समुच्चय का आकलन,
(b) शिक्षकों के लिए उपलब्ध शिक्षण समय का आकलन,
(c) दी गई पाठ्यक्रम विषय-वस्तु/दक्षता समुच्चय का शिक्षण-अधिगम अनुक्रम में व्यवस्थापन,
(d) शिक्षक और शिक्षार्थियों में उपलब्धि की भावना को विकसित न करना

उत्तर-(d)

उत्तर : शिक्षक और शिक्षार्थियों में उपलब्धि की भावना को विकसित न करना इकाई आयोजन के चरणों में सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न 3. इकाई आयोजना की परिसीमाओं में सम्मिलित नहीं हैं?

- (a) कभी-कभी शिक्षण-अधिगम उपागम का पहले से स्पष्ट पूर्वानुमान लगाना कठिन होता है।
(b) विषय-वस्तु/दक्षताओं का विभाजन कृत्रिम होता है।
(c) वर्ष के दौरान विकसित दक्षताओं का खण्डशः बोध होता है।
(d) इसका कड़ाई से पालन करने पर शिक्षक की नम्यता पर अंकुश नहीं लगता है।

उत्तर-(d)

उत्तर : इकाई आयोजन का कड़ाई से पालन करने पर शिक्षक की नम्यता पर अंकुश नहीं लगता है। इकाई आयोजन की परिसीमाओं में सम्मिलित नहीं हैं।

प्रश्न 4. "जिस शिक्षक ने अपने विषय और अपनी कक्षा से संबंधित पाठ को बुद्धिमतापूर्ण ढंग से आयोजित कर लिया है, वह बिना किसी चिंता के अत्यंत आत्मविश्वास के साथ अपने कार्य को समझते हुए उसे एक व्यावहारिक अंजाम तक पहुंचाने में समर्थ होगा।" यह कथन है—

- (a) जी. एच. राय (b) महात्मा गांधी
(c) जी.एच. ग्रीन (d) आईस्टीन

उत्तर—(c)

उत्तर : उपरोक्त कथन जी.एच. ग्रीन का है।

प्रश्न 5. पाठ आयोजना की हरबर्टीय प्रणालियों में कौन सी प्रणाली सम्मिलित नहीं है?

- (a) प्रस्तावना (b) प्रस्तुतीकरण
(c) साहचर्य (या तुलना) (d) उद्देश्य

उत्तर—(d)

उत्तर : पाठ आयोजन की हरबर्टीय प्रणालियों में उद्देश्य प्रणाली सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न 6. घन की तीनों विमाएं होती हैं—

- (a) असमान (b) एकसमान
(c) लंबाई अधिक होती है (d) चौड़ाई अधिक होती है

उत्तर—(b)

उत्तर : घन की तीनों विमाएं एक समान होती हैं।

प्रश्न 7. घनाभ में सम्मिलित नहीं है—

- (a) लंबाई (b) चौड़ाई
(c) ऊंचाई (d) त्रिज्या

उत्तर—(d)

उत्तर : घनाभ में त्रिज्या नहीं होती जबकि घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई होती है।

प्रश्न 8. घनाभ के आयतन का सूत्र है—

- (a) लंबाई × चौड़ाई × ऊंचाई (b) (लंबाई + चौड़ाई) × ऊंचाई
(c) लंबाई × चौड़ाई + मोटाई (d) 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

उत्तर—(a)

उत्तर : घनाभ के आयतन का सूत्र - लंबाई × चौड़ाई × ऊंचाई

प्रश्न 9. इकाई आयोजना शिक्षकों के लिए उपयोगी है—

- (a) विविध संकल्पनाओं के शिक्षण का व्यवस्थित एवं संतुलित तरीका है।
(b) शिक्षार्थियों की प्रगति का मूल्यांकन करता है।
(c) समय और संसाधनों का उचित प्रबंधन करता है।
(d) उपर्युक्त सभी प्रकार से

उत्तर—(d)

उत्तर : इकाई आयोजन शिक्षण का व्यवस्थित एवं संतुलित तरीका है, इसके द्वारा समय और संसाधनों का उचित प्रबंधन किया जाता है और साथ ही शिक्षार्थियों का मूल्यांकन किया जाता है।

प्रश्न 10. पाठ आयोजना की परिसीमाओं में सम्मिलित नहीं है—

- (a) यह शिक्षण को व्यवस्थित परन्तु अनम्य बनाती है।
(b) यदि इसका कठोरता से पालन किया जाए तो शिक्षक के लिए नई सूझों की कोई गुंजाइश नहीं रहती।
(c) इस पर अत्यधिक बल पाठ को नेमी नहीं बनाता है।
(d) यह प्रारंभिक शिक्षकों के लिए अच्छा है। अनुभवी शिक्षक संरक्षित कक्षा व्यवहारों में सामान्यतः कम निष्ठा रखते हैं।

उत्तर—(c)

उत्तर : पाठ आयोजना पर अत्यधिक बल पाठ को नेमी नहीं बनाता है पाठ आयोजन में सम्मिलित नहीं जबकि अन्य बातें पाठ आयोजन में शामिल हैं।

□ गणित शिक्षण की विधियां

इस खण्ड की पूर्ववर्ती इकाइयों में गणित शिक्षण के 'क्यों' और 'क्या' का विवेचन किया गया था। ये प्रश्न मूल रूप से पाठ्यचर्या आयोजन से संबंधित हैं। कक्षा शिक्षक का भले ही इन प्रश्नों से सीधा सरोकार न हो किन्तु शिक्षण की योजना बनाते समय वह निश्चित रूप से इनसे दिशा-निर्देश प्राप्त कर सकता है। विभिन्न शिक्षाशास्त्रियों द्वारा गणित शिक्षण की विभिन्न विधियां प्रतिपादित की गई हैं। इन शिक्षण-विधियों का ज्ञान शिक्षण-अधिगम युक्ति विकसित करने में सहायक हो सकता है। शिक्षक को किसी उपागम विशेष को अपनाने समय बच्चों की प्रकृति, उनकी रुचियों और परिपक्वता तथा उपलब्ध संसाधनों को ध्यान में रखना चाहिए। इस इकाई में सूचीबद्ध विविध विधियों के गुण-दोषों के अध्ययन से शिक्षक अपने शिक्षण कौशल में सुधार ला सकता है। इस इकाई में निम्नलिखित विधियों पर चर्चा की गई है—

1. व्याख्यान विधि
2. खेल विधि
3. आगमन-निगमन विधि
4. ह्यूरिस्टिक विधि

● उद्देश्य :

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात आप—

- ♦ गणित शिक्षण की विभिन्न विधियों का अभिनिर्धारण कर सकेंगे।
- ♦ प्राथमिक स्तर के बच्चों के परिपक्वता-स्तर और रुचि को ध्यान में रखते हुए उपयुक्त शिक्षण अधिगम युक्ति का चयन कर सकेंगे, और
- ♦ बच्चों के लिए गणित अधिगम को अधिक रोचक और अर्थपूर्ण बनाने के लिए क्रिया और खेल विधियों के अधिकाधिक उपयोग को प्रोत्साहित कर सकेंगे।

● गणित शिक्षण की विधियां

व्याख्यान विधि—व्याख्यान विधि में शिक्षक पूरे पाठ के दौरान स्वयं बोलता है और शिक्षार्थी ध्यानपूर्वक और चुपचाप सुनते हैं। हो सकता है कि शिक्षक श्यामपट्ट या अन्य किसी शिक्षण सहायता साधन का बिल्कुल प्रयोग न करें। वह शिक्षार्थियों को व्याख्यान के दौरान चर्चित बिंदुओं में से किसी भी बिंदु के संबंध में अपनी शंकाओं को उठाने या किसी प्रश्न का स्पष्टीकरण मांगने का अवसर नहीं देता। शिक्षार्थी प्रमुख विचारों को लिख लेते हैं और बाद में उसे रट लेते हैं।

व्याख्यान विधि नए प्रकरणों का परिचय देने में उपयोगी है। गणित का विषय तथ्यों के पूर्वज्ञान पर आधारित होता है। अतः यह विधि तथ्यों के कुछ पूर्वज्ञान की अपेक्षा रखने वाले प्रकरण के शिक्षण में प्रयोग की जा सकती है। साथ ही इससे कम समय में काफी संख्या में तथ्य प्रस्तुत किए जा सकते हैं।

उदाहरण—कक्षा एक से पांच तक या प्राथमिक स्तर पर दिए गए मूलधन पर निश्चित समय के लिए ब्याज की निश्चित दर के अनुसार साधारण ब्याज का परिकलन करने के लिए शिक्षार्थियों को साधारण ब्याज के परिकलन का सूत्र दिया जाना चाहिए। इस प्रकरण की प्रभावी प्रस्तुति के लिए व्याख्यान विधि द्वारा सबसे पहले साधारण ब्याज का सूत्र इस प्रकार दिया जाता है।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

इसके पश्चात शिक्षार्थियों या विद्यार्थियों से प्रयुक्त शब्दावली की पहचान कराई जाती है। शिक्षक को चाहिए कि सूत्र का विभिन्न स्थितियों में प्रयोग करने में वह विद्यार्थियों का मार्गदर्शन करे। इससे शिक्षार्थियों को सूत्र को भली-भांति याद रखने में सहायता मिलेगी।

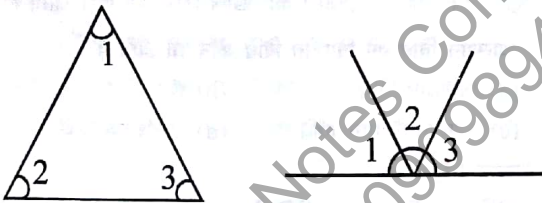
खेल विधि—खेल बच्चों की नैसर्गिक प्रवृत्ति है। शिक्षण के लिए इसका प्रभावी उपयोग किया जाता रहा है। खेलते समय विद्यार्थी अपनी निजी आवश्यकताओं को पहचानते हैं, वे क्रियाकलापों की आयोजना में सहायता करते हैं, मार्गदर्शन स्वीकार करते हैं और अपने निजी लक्ष्य निर्धारित करते हैं। वे अपने आपसी सहयोग और सहभागिता के माध्यम से अधिकतम सीखते हैं। खेल के दौरान अधिगम वास्तविक और रोचक होता है तथा व्यक्तिगत आवश्यकताओं के साथ सहज समायोजित होता है। अधिगम प्रक्रिया रोचक होती है और बच्चों के लिए वातावरण अधिक मुक्त, अनौपचारिक और परिचित होता है। खेल विधि वांछित अभिवृत्तियों और कौशलों के विकास में सहायक होती है। इससे शिक्षार्थियों में आत्मविश्वास का संचार होता है।

आगमन-निगमन विधि—गणित अपनी प्रगति में प्रयोगात्मक और आगमनात्मक है। आगमन तार्किकता का वह रूप है जिसमें विशेष पदार्थों या विशिष्ट प्रक्रियाओं के अध्ययन से एक सामान्य नियम निकाला जाता है। बच्चा मापन, कौशलात्मक या रचनात्मक क्रियाकलाप, प्रतिरूपों आदि का प्रयोग ऐसे संबंध का पता लगाने के लिए कर सकता है, जिसे बाद में वह स्वयं किसी सिद्धान्त या नियम को प्रतीकात्मक रूप में निरूपित कर सके। बच्चे द्वारा निरूपित सिद्धान्त, नियम या परिभाषा, विशिष्ट या वैयक्तिक दृष्टान्तों का कुल जोड़ होगा। सभी आगमनों से उद्भूत सामान्यीकरण को अस्थायी निष्कर्ष माना जाता है।

उदाहरण 1. विद्यार्थियों से कुछ त्रिभुज बनाने के लिए कहें। उनसे कहें कि वे प्रत्येक त्रिभुज के कोण मापें और उनका जोड़ ज्ञात करें।

निष्कर्ष—त्रिभुज के तीनों कोणों का जोड़ 2 समकोण अर्थात् $2 \times 90^\circ$ के बराबर होता है।

आप बच्चों से तीनों कोणों को काटने और उन्हें ऐसे बिंदु पर रखने के लिए कहें जिनसे वे रेखाकार बन जाएं।



उदाहरण 2.

$$3 + 5 = 8$$

$$5 + 7 = 12$$

$$9 + 11 = 20$$

निष्कर्ष—दो विषम संख्याओं का जोड़ एक सम संख्या होती है। निगमन में नियम को स्वीकार किया जाता है और फिर उसे कुछ विशेष उदाहरणों पर लागू किया जाता है। बच्चा नियम नहीं खोजता पर उस नियम को लागू करने का कौशल विकसित करता है। ऐसे में वह सामान्य से विशेष या अमूर्त से मूर्त की ओर बढ़ता है। वास्तविक व्यवहार में आगमन और निगमन के सम्मिश्रण का प्रयोग किया जाता है।

● आगमन विधि

1. विशेष से सामान्य की ओर, मूर्त से अमूर्त की ओर अग्रसर होती है।
2. यह बच्चों की आवश्यकताओं और रुचियों का ध्यान रखती है। यह एक विकासात्मक प्रक्रिया है।
3. बच्चा सामान्यीकरण या नियम को निरूपित करता है। अतः वह उसे

आसानी से याद रख पाता है।

4. यह 'खोज' को प्रोत्साहित करती है और चिन्तन को उद्दीप्त करती है।
5. तार्किकता द्वारा प्रक्रिया का कैसे और क्यों स्पष्ट हो जाता है।

● निगमन विधि

1. सामान्य से विशेष की ओर अमूर्त से मूर्त की ओर अग्रसर होती है।
2. बच्चे पर तथ्य थोपे जाते हैं। संवृद्धि के सिद्धान्त को ध्यान में नहीं रखा जाता है।
3. बच्चों को नियम दिया जाता है। वह उसकी प्रकृति को समझ नहीं पाता इसलिए आसानी से भूल सकता है।
4. प्राधिकारी व्यक्ति द्वारा सूत्र को प्रस्तुत किया जाता है और उसके कंठस्थीकरण को प्रोत्साहित किया जाता है।
5. प्रक्रिया को बिना किसी तर्क के ज्यों का त्यों स्वीकार कर लिया जाता है।

● ह्यूरिस्टिक विधि

ह्यूरिस्टिक विधि को 'खोज विधि' भी कहा जा सकता है। यह व्याख्यान विधि से विपरीत है। शिक्षक द्वारा सब कुछ बताए जाने की अपेक्षा विद्यार्थी अपने आप सब कुछ पता लगाता है। यह विद्यार्थी से स्वक्रिया तथा स्व-अधिगम की मांग करती है। इस विधि से विद्यार्थी स्वयं तर्क सीखता है। इसमें विद्यार्थी द्वारा अध्यापक से किसी प्रकार का मार्गदर्शन, सहायता और प्रोत्साहन की अपेक्षा नहीं की जाती। इस विधि से विद्यार्थी में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित होता है। यह विधि शिक्षार्थी को सदा के लिए सफल बनाने के लिए उसमें आत्मविश्वास, मौलिकता, निर्णय की स्वतंत्रता और चिंतन शक्ति विकसित करती है।

व्यावहारिक तौर पर देखा जाए, तो यह विधि अपने चरम रूप में उपयुक्त और वांछनीय नहीं है। बच्चा आखिरकार बच्चा ही होता है। अधिकतर बातें उसके लिए नई होती हैं। वह अनेक क्रियाओं से अनभिज्ञ होता है और कुछ स्थितियों में उसे प्रत्येक कदम पर शिक्षक की सहायता की आवश्यकता हो सकती है।

● अनुदेशन आयोजन के आधारभूत सिद्धान्त

उपरोक्त विवेचित सभी विधियों में से प्रत्येक का शिक्षण में अपना एक विशिष्ट स्थान है। परन्तु इनमें से कोई भी सदा उपयुक्त नहीं होती। अतः व्यवहार में, इनमें से प्रत्येक के कुछ तत्वों के संयोजन से बनी संकलन विधि अपनाई जाती है। युक्तियुक्त अनुदेशन रणनीति की निर्माण प्रक्रियाओं से संबद्ध कुछ मान्य समान बिन्दु इस प्रकार हैं—

- ◆ किसी भी विषय को प्रस्तुत करने से पहले यह सुनिश्चित कर लें कि शिक्षार्थी नए कार्य के लिए तैयार है।
- ◆ जब तक संबंधित संकल्पनाएं और सिद्धान्तों को समझ नहीं लिया जाता, तब तक प्रक्रियाओं की प्रस्तुति और विकास के लिए मूर्त सामग्री का प्रयोग करें। प्राथमिक कक्षाओं में मूर्त सामग्री के साथ किए जा रहे कार्य को एक ऐसे परिपक्व चिंतन स्तर तक ले जाना चाहिए कि प्रक्रियाओं के अर्थ आसानी से समझे जा सकें। अभ्यास मात्र से अधिगम सार्थक नहीं होता।
- ◆ विषय-वस्तु, विधियों और सामग्री को विद्यार्थियों की आवश्यकताओं, रुचियों और विकास या (संवृद्धि) स्तरों के अनुरूप बनाएं।
- ◆ शिक्षार्थी जब तक समाविष्ट प्रक्रियाओं का अर्थ पूरी तरह समझ नहीं लेते तब तक कौशल विकास के लिए पुनरावृत्ति अभ्यास को स्थगित कर दें।
- ◆ पाठ्यपुस्तकों में दी गई विषय-वस्तु को अनुपूरित करने के लिए दृश्य साधनों और सामुदायिक संसाधनों का प्रयोग करें।

□ प्राइमरी गणित : शिक्षण अधिगम

प्रस्तावना—शिक्षण अधिगम प्रक्रिया के दौरान आपको उन क्षेत्रों का निर्धारण करने और पहचानने की आवश्यकता होती है जिनमें विद्यार्थी गलतियाँ करते हैं। यह शिक्षण प्रक्रिया का एक संवेदनशील चरण है जहाँ आपको निदान करना होता है तथा शिक्षार्थियों में अधिगम की वांछित गुणात्मकता को सुनिश्चित करने के लिए उपचारात्मक शिक्षण की दृष्टि से शिक्षण सामग्री तैयार करनी होती है।

शिक्षा के प्रसंग में निदानात्मक परीक्षण प्रक्रिया एक उपाय है और उपचारात्मक शिक्षण एक नमूना है। इसलिए प्रभावपूर्ण अधिगम को सुनिश्चित करने के लिए तथा शिक्षा की गुणात्मकता को सुधारने के लिए निदानात्मक परीक्षण और उपचारात्मक शिक्षण अत्यंत अनिवार्य है।

● उद्देश्य

निदानात्मक परीक्षण की प्रकृति और प्रयोजन को समझ सकेंगे।

- ◆ निदानात्मक परीक्षण के अर्थ और महत्व को समझ सकेंगे।
- ◆ कक्षा स्थितियों में गणित में उपचारात्मक शिक्षण का आयोजन कर सकेंगे।
- ◆ कक्षा में शिक्षा अधिगम प्रक्रिया में निदानात्मक परीक्षण के सोपानों और चरणों को अपना सकेंगे।

● निदानात्मक परीक्षण

सामान्यतः किसी इकाई या प्रकरण को पूरा करने के बाद आप शिक्षार्थियों की निष्पत्ति की जांच के लिए परीक्षण करते हैं। मूल्यांकन के पश्चात् आप कुछ निष्कर्ष निकालते हैं और आपको पता लगता है कि कुछ विद्यार्थियों ने बहुत अच्छा किया है, जबकि विद्यार्थियों के एक विशेष वर्ग ने आपकी अपेक्षा से कम संप्राप्ति की है। अब हमें इस निष्पत्ति या मंद अधिगम के कारणों को ढूँढना होता है। अवश्य ही इस निम्न निष्पत्ति के कुछ कारण होंगे। अधिगम कठिनाइयों के क्षेत्रों का पता लगाना तथा उन्हें पहचानना ही निदानात्मक परीक्षण की ओर ले जाता है।

निदानात्मक परीक्षण में निम्नलिखित बिंदुओं को अवश्य ध्यान में रखना चाहिए—

- वे कौन से शिक्षार्थी हैं जिन्हें सहायता की आवश्यकता है?
- त्रुटि क्यों हुई?
- त्रुटियाँ किस/किन क्षेत्र/क्षेत्रों में होती हैं?

● निदानात्मक परीक्षण के सोपान एवं चरण

शैक्षिक निदान में अनिवार्य सोपान है—

- उन विद्यार्थियों को पहचानना जिन्हें सहायता की आवश्यकता है,
- त्रुटियों या अधिगम कठिनाइयों को खोजना
- धीमी गति से सीखने के कारणों की खोज करना

● उपचारात्मक शिक्षण

जहाँ निदान विद्यार्थियों की कठिनाइयों तथा उनके चरणों को खोजने की प्रक्रिया है, वहीं तत्संबंधी अनुवर्ती कार्यों से विद्यार्थियों को अपनी कमियों को दूर करने में सहायता मिलती है। इस सोपान को सामान्यतः उपचारात्मक शिक्षण कहा जाता है। इसके लिए आपको ऐसी सामग्री तैयार करने या प्रबंध करने में कुशल होना चाहिए जिसका उपयोग सुधारात्मक अनुदेशन में किया जा सके और जिससे शिक्षण की गुणात्मकता बढ़ाई जा सके।

उपचारात्मक शिक्षण अपनाने के लिए निम्नलिखित पर ध्यान दें —

- सामग्री विद्यार्थियों की प्रगति के क्रमबद्ध अभिलेखन को प्रोत्साहित करती हो।
- सुधारात्मक सामग्री विद्यार्थियों को प्रगति करने का अवसर देने वाली हो।
- सुधारात्मक सामग्री की रचना विद्यार्थियों की वैयक्तिक कठिनाइयों को दूर करने के लिए की जानी चाहिए।
- सुधारात्मक सामग्री क्रमिक और आत्म निदेशात्मक तथा विद्यार्थियों को स्वतंत्र करने का अवसर देने वाली होनी चाहिए। सामग्री में दिए जाने वाले निर्देश सफलतापूर्वक या आसानी से पठनीय तथा बोधगम्य हों।

उदाहरण : उपचारात्मक शिक्षण की सामग्री तैयार करने के लिए आपको ऐसी सामग्री तैयार करनी है जिससे विद्यार्थी को दी हुई भिन्नों में हरों को समान करने के अभ्यासों का पर्याप्त अवसर प्राप्त हो :

$$(i) 3 + \frac{5}{7} = \frac{3}{1} + \frac{5}{7} = \frac{3 \times 7}{1 \times 7} + \frac{5}{7} = \frac{21}{7} + \frac{5}{7} = \frac{26}{7}$$

$$(ii) 4 + \frac{6}{7} = \frac{4}{1} + \frac{6}{7} = \frac{4 \times 7}{1 \times 7} + \frac{6}{7} = \frac{28}{7} + \frac{6}{7} = \frac{34}{7}$$

विद्यार्थियों को इसी प्रकार के प्रश्नों पर तब तक पर्याप्त अभ्यास करवाना चाहिए जब तक वे पूर्णदक्षता प्राप्त नहीं कर लेते। शैक्षणिक सामग्री को चुनते तथा प्रयोग करते समय क्षेत्र विशेष में विद्यार्थी की वैयक्तिक आवश्यकता सबसे महत्वपूर्ण बात है। आपको व्यक्तिगत स्तर पर व्यवहार करना चाहिए।

● तीव्र गति से सीखने वालों के लिए गणितीय कार्यक्रम

सामान्य रूप से दिन-प्रतिदिन का शिक्षण औसत शिक्षार्थियों पर केन्द्रित होता है। दूसरों पर सम्यक ध्यान नहीं दिया जाता। आपको अपने कुछ ऐसे विद्यार्थियों की याद होगी जो अध्ययन में बहुत कमजोर रहे थे। साथ ही आपकी कक्षाओं में कुछ ऐसे विद्यार्थी भी रहे थे जो बहुत जल्दी ग्रहण कर लेते थे, बहुत कंठस्थ कर लेते थे, बहुत उत्साह दिखाते थे और अंततः परीक्षा में बहुत अच्छे अंक प्राप्त करते थे। प्रायः ऐसे विद्यार्थियों को तीव्रगति से सीखने वाला कहा जाता है। ऐसे विद्यार्थियों का व्यवहार विशिष्ट प्रकार का होता है और जहाँ तक गणित शिक्षण-अधिगम का संबंध है उनकी आवश्यकताएं सर्वथा भिन्न होती हैं।

● उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात्

- तीव्र गति से सीखने वालों को पहचान सकेंगे,
- तीव्र गति से सीखने वालों के लिए विशिष्ट कार्यक्रम की आवश्यकता का महत्व समझ सकेंगे।
- तीव्र गति से सीखने वाले विद्यार्थियों की प्रकृति तथा उनकी आवश्यकताओं को समझ सकेंगे।
- उन्हें अपनी अधिगम सामग्री तैयार करने के लिए प्रोत्साहित कर सकेंगे।

● तीव्र गति से सीखने वालों के अभिलक्षण

- गणित में बहुत उच्च अंक प्राप्त करते हैं।
- दूसरों की अपेक्षा 1/3 समय में विषय वस्तु सीख लेते हैं।
- प्रश्नों के उत्तर शीघ्र तथा शुद्ध रूप में देते हैं।
- न्यूनतम संभव समय में पूर्णदक्षता प्राप्त कर लेते हैं।
- बेहतर स्मृति तथा बोध क्षमता प्रदर्शित करते हैं।
- एक ही बात वैकल्पिक तरीकों से करने के बारे में पूछते हैं तथा उनकी सराहना करते हैं।

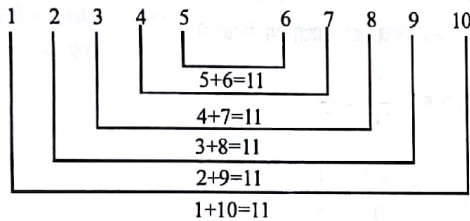
● तीव्र गति से सीखने वालों के लिए समुन्नयन कार्यक्रम

तीव्र गति से सीखने वाले विद्यार्थी गणितीय संकल्पनाओं को जल्दी समझने में समर्थ होते हैं। उनकी विषय ग्रहण करने की शक्ति तथा अभिकलन क्षमता उन्हें सामान्य विद्यार्थियों से अलग करती है। कभी-कभी जिज्ञासा तथा सृजनात्मकता से भरे उनके प्रश्न शिक्षकों को अप्रिय लगते हैं। परंतु शिक्षकों का यह कर्तव्य है कि विषय के बारे में अधिक से अधिक जानने की उनकी उत्कृष्ट इच्छा को संतुष्ट करें। ऐसे विद्यार्थियों के लिए पृथक पाठ्यक्रम की मांग करना उचित नहीं है। फिर भी शिक्षकों द्वारा निम्नलिखित उपागम अपनाए जा सकते हैं—

- (A) उन्हें अपनी आयु तथा कक्षा स्तर के अनुसार कठिन समस्याओं का हल करने के लिए कहा जाए
(B) वे अपने सहपाठियों की सहायता करें
(C) उन्हें गणित शिक्षण के उच्च उद्देश्यों को विकसित करने के अवसर उपलब्ध कराए जाएं।

● समुन्नयन कार्यक्रम :

उदाहरण : 1 से 10 तक की संख्याओं का जोड़



यहां हमारे पास हैं,

$$11 \text{ के } 5 \text{ समूह अतः योग} = 5 \times 11 = 55$$

$$11 \text{ से } 20 \text{ तक की संख्याओं का योग} = 5 \times 31 = 155$$

$$21 \text{ से } 30 \text{ तक की संख्याओं का योग} = 5 \times 51 = 255$$

$$31 \text{ से } 40 \text{ तक की संख्याओं का योग} = 5 \times 71 = 355$$

● भिन्न

प्रश्न : $3/5$ और $6/8$ के बीच की ऐसी भिन्नात्मक संख्याएं लिखें जिनका हर 40 है।

संकेत : पहले हरों का लघुत्तम निकाल कर उन्हें एक जैसा बनाएं। 5 और 8 का लघुत्तम 40 है।

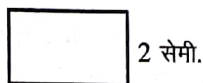
$$\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{30}{40}$$

अतः $3/5$ और $6/8$ के बीच भिन्नात्मक संख्याएं हैं—

$$\frac{25}{40}, \frac{26}{40}, \frac{27}{40}, \frac{28}{40}, \frac{29}{40}$$

परिमाण



3 सेमी.

$$\text{परिमाण} = (3 \text{ सेमी.} + 2 \text{ सेमी.}) \times 2$$

$$= 5 \text{ सेमी.} \times 2 = 10 \text{ सेमी.}$$

● दशमलव

उदाहरण : दशमलव संख्या का मान 10 गुना, 100 गुना, 1000 गुना, 10000 गुना करना आदि।

(i) 1.67 का मान 10 गुना करें।

$$\text{उत्तर} - 1.67 \times 10 = 16.7$$

(ii) 1.67 का मान 100 गुना करें।

$$\text{उत्तर} - 1.67 \times 100 = 167$$

(iii) 1.67 का मान 10000 गुना करें।

$$\text{उत्तर} - 1.67 \times 10000 = 16700$$

उदाहरण : दशमलव संख्या के मान का दशांश, शतांश तथा सहस्रांश बनाना।

(i) 15 (15.0) का दशांश लिखिए।

$$\text{उत्तर} - 15 \text{ का दशांश} = \frac{1}{10} \times 15 = 1.5$$

(ii) 115.4 का शतांश लिखिए

$$\text{उत्तर} - \frac{1}{100} \times 115.4 = 1.154$$

(iii) 7256 का सहस्रांश लिखिए

$$\text{उत्तर} - 7256 \text{ का सहस्रांश} = \frac{1}{1000} \times 7256 = 7.256$$

● आयतन

उदाहरण : किसी हौज की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 60 सेमी., 30 सेमी. और 20 सेमी. है। इसका आयतन ज्ञात करें—

$$\begin{aligned} \text{आयतन} &= \text{लंबाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊंचाई} \\ &= 60 \times 30 \times 20 \\ &= 36000 \text{ घन सेमी.} \end{aligned}$$

प्रश्न : 300 का 8 प्रतिशत ज्ञात करें—

$$\text{उत्तर} : = 300 \times \frac{8}{100} = 24$$

प्रश्न : $4/5$ को प्रतिशत में बदलें।

$$\text{उत्तर} : = \frac{4}{5} \times 100 = \frac{400}{5} = 80\%$$

अभ्यास प्रश्न

प्रश्न 1. निम्न के लिए भिन्ने लिखें—
0.0001, 0.00001

$$\text{उत्तर} : 0.0001 = \frac{1}{10000}$$

$$0.00001 = \frac{1}{100000}$$

प्रश्न 2. निम्नलिखित को प्रतिशत में बदलें—

$$1/5, \frac{1}{25}, 1/50, 1/20$$

उत्तर : $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$

$\frac{1}{25} = \frac{1}{25} \times 100 = 4\%$

$\frac{1}{50} = \frac{1}{50} \times 100 = 2\%$

$\frac{1}{20} = \frac{1}{20} \times 100 = 5\%$

प्रश्न 3. निम्नलिखित में प्रत्येक को न्यूनतम भिन्न में बदलें

(i) 5% (ii) $\frac{32}{3}\%$

उत्तर : $5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

$\frac{32}{3}\% = \frac{32}{3} \times \frac{1}{100} = \frac{32}{300} = \frac{8}{75}$

प्रश्न 4. 41 से 50 तक संख्याओं का योग ज्ञात करें।

उत्तर : 41 से 50 तक की संख्याओं का योग
 $= 41 + 50 = 91 \times 5 = 455$

प्रश्न 5. 551 से 560 तक की संख्याओं का योग ज्ञात करें।

उत्तर : $551 + 560 = 1111 \times 5 = 5555$

प्रश्न 6. $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{7}{8}$ के बीच की संख्याएं हैं-

उत्तर : $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{7}{8}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{8}{8}$ तथा $\frac{7}{8} \times \frac{3}{3}$

$= \frac{16}{24}$ तथा $\frac{21}{24}$

अतः दोनों के बीच की भिन्ने हैं-

$\frac{17}{24}, \frac{18}{24}, \frac{19}{24}, \frac{20}{24}$

प्रश्न 7. एक टीम ने 10 खेलों में 80% खेल जीत लिए। उसने कितने खेल हारे?

उत्तर : 10 खेलों में जीते मैच = 80%

$\therefore$ 10 खेलों में हारे गए मैच का प्रतिशत = $(100 - 80)\% = 20\%$

$\therefore$ हारे गए मैचों की संख्या = $\frac{10}{100} \times 20 = 2$

प्रश्न 8. $\frac{15}{21}$ और $\frac{19}{21}$ के बीच की भिन्ने कौन सी हैं?

उत्तर : $\frac{15}{21}$ और $\frac{19}{21}$

दोनों के बीच की भिन्ने = $\frac{16}{21}, \frac{17}{21}, \frac{18}{21}$

प्रश्न 9. 1001 से 1010 तक की संख्याओं का योग ज्ञात करें।

उत्तर : 1001 से 1010 के बीच संख्याओं का योग = $2011 \times 5 = 10055$

प्रश्न 10. 20 का दशांश, 18 शतांश ज्ञात करें।

उत्तर : 20 का दशांश = $\frac{20}{10} = 2.0$

18 का शतांश = $\frac{18}{100} = 0.18$

प्रश्न 11. 1.82×1000 का मान ज्ञात करें।

उत्तर : $1.82 \times 1000 = 1820.00$

प्रश्न 12. एक कमरे की लंबाई, चौड़ाई एवं ऊंचाई क्रमशः 22 मी., 18 मी., 20 मी. है। कमरे का आयतन ज्ञात करें।

उत्तर : आयतन = $22 \times 18 \times 20$ मी.
 $= 7920$ घन मी.

प्रश्न 13. दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में बदलें

(A) 0.5 (B) .20

उत्तर : दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में

(A) $0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

(B) $.20 = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

प्रश्न 14. निम्न को प्रतिशत में बदलिए।

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{2}{8}$

उत्तर : प्रतिशत में

(a) $\frac{1}{4} \times 100 = 25\%$

(b) $\frac{2}{8} \times 100 = 25\%$

प्रश्न 15. तीव्र या मन्द शब्द से रिक्त स्थानों की पूर्ति करें-

- वह शिक्षार्थी जो पहले प्रयास में ही प्रश्न का सही उत्तर देता है।गति से सीखे वाला शिक्षार्थी होता है।
- परीक्षा में कम अंक पाने वालागति से सीखने वाला शिक्षार्थी होता है।
- समस्या को गहराई से विस्तारपूर्वक सीखने के लिए उत्सुक शिक्षार्थीगति से सीखने वाला शिक्षार्थी होता है।
- वह शिक्षार्थी जो अपनी त्रुटियां ढूँढ़ लेता हैगति से सीखने वाला शिक्षार्थी होता है।
- शिक्षार्थी जो समस्या के समाधान में बहुत अधिक समय लगाता हैगति से सीखने वाला शिक्षार्थी होता है।

उत्तर - (i) तीव्र (ii) मन्द (iii) तीव्र (iv) तीव्र (v) मन्द

Amilech Singh

गणित शिक्षण विधि एवं अधिगम

□ प्राथमिक स्तर पर गणित

● प्रस्तावना

विज्ञान और प्रौद्योगिकी के इस युग में गणित का सुदृढ़ आधार सभी के लिए नितान्त अनिवार्य माना जाता है। प्रारंभिक स्तर से उच्च स्तर तक विविध रूपों में इसका ज्ञान जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में अपेक्षित है, चाहे वह घर, व्यवसाय, उद्योग, सरकार हो या कम्प्यूटर अथवा निर्णयना। विश्व भर में यह स्वीकार कर लिया गया है कि प्रत्येक नागरिक को कुछ मूलभूत गणितीय ज्ञान और कौशलों से लैस होना आवश्यक है। अतः गणित सार्वभौम शिक्षा का एक अंग बन गया है और एक से दस तक की कक्षाओं के लिए अध्ययन का अनिवार्य विषय बना दिया गया है।

● गणित अधिगम का महत्त्व

गणित के प्रयोग के बिना किसी भी क्रिया के विषय में सोचना असंभव है, चाहे वह भूमि खोदना, सामान लादना और उतारना, पशु चराना, कारखाने में श्रम कार्य जैसा कौशल निरपेक्ष कार्य हो या मापन, यांत्रिक कार्य, परिकलन इत्यादि जैसे कौशलपूर्ण कार्य। प्रायः गणित के मापन-प्रकार्य के प्रयोग से ही हम भौतिक पदार्थों और घटनाओं का वर्णन कर पाते हैं। गणित के बिना कोई भी आर्थिक क्रिया नहीं की जा सकती है। अतः सबके लिए गणित सीखना अनिवार्यतः अपेक्षित है। निम्नलिखित अनुभाग में गणित अधिगम के प्रकार्यात्मक, अनुशासनिक और सांस्कृतिक पक्षों पर चर्चा की गई है।

● प्रकार्यात्मक पक्ष

गणित के इतिहास में झांकने से हमें पता चलता है कि गणित अधिगम के लिए मुख्य अभिप्रेरक उसकी प्रकार्यात्मक उपयोगिता से मिला है। भूमि सर्वेक्षण की समस्याओं के कारण ज्यामिति की आवश्यकता पड़ी, जबकि वाणिज्य मापन और क्षेत्रमिति की समस्याओं में उपयोगी होने के कारण अंकगणित और बीजगणित का प्रादुर्भाव हुआ। ज्यामिति के कुछ पक्ष यथा सममिति को वास्तुकला, मूर्तिकला और ललित कलाओं में अभिव्यक्ति मिली है। प्राकृतिक घटनाओं का प्रेक्षण, जैसे आकाश में ध्रुवतार का एक निश्चित स्थिति में दिखना, खगोलीय घटनाओं का चक्रीय आवर्तन और उनसे संबद्ध गणितीय प्रक्रियाओं ने गणित-ज्यामिति के क्षेत्र में प्रविधियों के सुधार में मानव जाति की सहायता की है। खेलों का इष्टतम प्रयोग और बेहतर उपज गणित के प्रभाव के कारण है। यातायात और संचार की विविध प्रणालियों की आयोजना भी गणित के ज्ञान पर आधारित है। अनेक वैज्ञानिक आविष्कार गणित का परिणाम हैं।

गणित के प्रकार्यात्मक पक्षों को दर्शाने वाली कुछ दक्षताओं का इस प्रकार वर्णन किया जा सकता है :

- ◆ जोड़, घटाना, गुणा और भाग से संबंधित संख्याओं, भिन्नों और दशमलवों का परिकलन
- ◆ प्रतिशत/अनुपात
- ◆ सारणी/ग्राफ पठन
- ◆ आकलन/संख्याओं का निकटन

- ◆ मापन और उसके लिए उपकरणों का प्रयोग
- ◆ सांख्यिकी
- ◆ स्थानिक संबंध-ज्यामितीय रचनाएं
- ◆ पाइथागोरस संबंध
- ◆ बीजीय प्रतीकवाद
- ◆ दैनिक जीवन में प्रयुक्त सूत्र

● अनुशासनिक (विद्याशाखापरक) पक्ष

विद्याशाखा के रूप में गणित के अध्ययन से अनेक मूल्य जुड़े हैं। गणित मस्तिष्क को विशिष्ट तरीके से कार्य करने के लिए अनुशासित करता है। बच्चों में कुछ वांछित अभिवृत्तियों, रुचियों और अनुभूतियों को विकसित करने की आवश्यकता होती है। गणित शिक्षण से शिक्षार्थियों में वस्तुनिष्ठता, तार्किक दृष्टिकोण, विश्लेषणात्मक चिंतन योग्यता, वैज्ञानिक स्वभाव, सौन्दर्यशास्त्र का अभिज्ञान और रसबोध जैसी विशेषज्ञ अभिवृत्तियों एवं अनुभूतियों का सृजन किया जा सकता है। प्राकृतिक घटनाओं के एक नियत स्वरूप, लय और आवर्तन की पहचान से मानव को अपनी जीवनशैली के आयोजन और दैनिक जीवन की समस्याओं को सुलझाने में सहायता मिली है।

● सांस्कृतिक पक्ष

गणित विषय प्रत्येक देश की सांस्कृतिक विरासत से निकटता से जुड़ा है। हमारे देश की एक गणितीय विरासत है जिस पर हमें गर्व है। संख्यांक, संख्यांकों की दशमलव प्रणाली और शून्य, जिसका आज सारा विश्व प्रयोग कर रहा है, वह हमारे प्राचीन भारतीय गणितज्ञों की देन है। कुछ प्रसिद्ध भारतीय गणितज्ञों के नाम हैं—श्रीधर, भास्कराचार्य, वराहमिहिर, आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त और रामानुजम।

● प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के उद्देश्य

प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण का एक प्रमुख उद्देश्य बच्चों को इस योग्य बनाना है कि वे उन अंकीय एवं स्थानिक समस्याओं को शुद्धता और शीघ्रता के साथ हल कर सकें जो घर, विद्यालय एवं समुदाय में उनके समक्ष आती हैं। इस स्तर पर प्राथमिक गणित ऐसी होनी चाहिए जो बच्चों को उनके भौतिक जगत एवं निकटस्थ परिवेश से प्राप्त अनुभवों के माध्यम से आधारभूत गणितीय संकल्पनाओं की समझ के विकास में सहायता कर सके—

प्राथमिक स्तर पर गणित के पाठ्यक्रम द्वारा निम्नलिखित उद्देश्यों की पूर्ति होनी चाहिए—

- ◆ शीघ्रता एवं शुद्धता से परिकलन करने की योग्यता
- ◆ मापों की काफी हद तक सही अनुमान लगाने एवं आकलन करने की योग्यता
- ◆ तार्किक ढंग से सोचने की आवश्यकता
- ◆ क्रम एवं प्रतिरूप पहचानने की योग्यता
- ◆ दैनिक जीवन की साधारण समस्याएं हल करने में गणितीय संकल्पनाओं एवं कौशलों का प्रयोग करने की योग्यता
- ◆ किसी मौखिक विवरण को (क) समुचित प्रतीकों का प्रयोग करते हुए गणितीय शैली में और (ख) आरेखों में रूपांतरित करने की योग्यता

प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के उपर्युक्त उद्देश्यों के अतिरिक्त, सामाजिक पक्षों से संबंधित निम्नलिखित उद्देश्यों की पूर्ति का भी ध्यान रखा जाना चाहिए—

- प्रौद्योगिकी और मानव उद्यम के अन्य क्षेत्रों के उन्नयन में गणित के योगदान को सराहने की योग्यता,
- बैंकिंग, बीमा, कराधान जैसी संस्थाओं के सामाजिक महत्व का ज्ञान
- परिनिष्ठ उपकरणों में मापन कौशल के प्रयोग की योग्यता, और
- बुद्धिमान उपभोक्ता, निवेशक और समस्या समाधानकर्ता बनने की योग्यता।

● प्राथमिक स्तर पर गणित की पाठ्यचर्या

शिक्षार्थियों की सामाजिक और वैयक्तिक आवश्यकताओं की दृष्टि से बदलते राष्ट्रीय लक्ष्यों और प्राथमिकताओं के परिप्रेक्ष्य में गणित पाठ्यचर्या की प्रासंगिकता बनाए रखने के लिए उसमें निरन्तर परिवर्तन होना चाहिए। गणित पाठ्यचर्या की वर्तमान आलोचना यह है कि इसमें न तो शिक्षार्थियों की वैयक्तिक आवश्यकताओं का ध्यान रखा जाता है और न ही सामाजिक आवश्यकताओं का। इस समस्या को दूर करने के लिए प्राथमिक स्तर पर गणित में न्यूनतम अधिगम स्तर निर्दिष्ट किए गए हैं। निम्नलिखित अनुभाग में पाठ्यचर्या को प्रभावित करने वाले कारकों, उसके संगठन और गणित में न्यूनतम अधिगम स्तर के संदर्भ में गणित की पाठ्यचर्या का विवेचन किया जा रहा है।

● गणित की पाठ्यचर्या को प्रभावित करने वाले कारक

मानव संसाधन विकास का एक शक्तिशाली माध्यम शिक्षा है जिसे वांछित सामाजिक रूपान्तरण की प्रक्रिया में सहायक होना चाहिए। शिक्षा की विषय-वस्तु और प्रक्रिया का इस प्रकार विचारपूर्वक आयोजन किया जाना चाहिए जिससे वह सामाजिक सांस्कृतिक, राजनीतिक और आर्थिक एवं शिक्षाशास्त्रीय विचार-विद्वानों के संदर्भ में शिक्षार्थी-व्यवहार में वांछनीय परिवर्तन ला सके।

● सामाजिक, सांस्कृतिक, राजनीतिक और आर्थिक विचार बिंदु

प्राथमिक स्तर पर गणित की विषय-वस्तु के चयन के लिए शिक्षा और अवसर की समानता, सांस्कृतिक विरासत का परिरक्षण, चरित्र निर्माण और मूल्यों का अन्तर्ग्रहण तथा भविष्योन्मुखी शिक्षा जैसे सामाजिक, सांस्कृतिक, राजनीतिक और आर्थिक विचार बिंदुओं को ध्यान में रखा जाता है।

● शिक्षाशास्त्रीय विचार बिंदु

गणित पाठ्यचर्या को यदि यथार्थ, संगत और अर्थपूर्ण होना है, तो आवश्यक है कि वह गणितीय विषय-वस्तु की प्रकृति और शिक्षाशास्त्रीय लक्ष्यों के अनुरूप हो। यह शिक्षार्थी की प्रकृति, अधिगम प्रक्रिया और शिक्षार्थियों के लिए गणित पाठ्यचर्या के प्रस्तुतीकरण के बारे में व्यवस्थित शोध पर आधारित होना चाहिए।

गणित पाठ्यचर्या की आयोजना के लिए निम्नलिखित मुद्दे विशेष रूप से संगत हैं—

- शिक्षार्थी की विकासात्मक आवश्यकताएं, उसका बौद्धिक विकास और विभिन्न स्तरों पर अधिगम की क्षमता
- बदलते समाज में गणित का स्थान
- बदलते संदर्भ में गणितीय ज्ञान की अधिक सारगर्भित व्याख्याएं
- प्राथमिक स्तर के अनुरूप गणित का नवीन ज्ञान
- गणित में अन्तर्निहित रुचि और चुनौतियां
- परंपरागत प्रकरणों का अनुकूलन या परिवर्तन
- सतत और व्यापक मूल्यांकन का प्रयोग तथा उपचारात्मक शिक्षा का प्रावधान
- परंपरागत प्रकरणों के समुन्नयन के लिए नवीन प्रकरणों का उपयोग

● गणित पाठ्यचर्या का संगठन

पाठ्यचर्या निर्माताओं के सामने कार्यक्रम के लिए चुनी गई विषय-वस्तु के संगठन की समस्या आती है। गणित में एक अन्तःनिर्मित और सुसंगत तर्क होता है जो पढ़ाई जाने वाली विषय सामग्री का अनुक्रम निर्धारित करता है। यह अंकों तथा अंक संक्रियाओं के लिए विशेष रूप से सत्य है। मापन से संबंधित प्रकरण और दैनिक जीवन की समस्याओं को सुलझाने में उनके अनुप्रयोग विषय-वस्तु के संगठन के लिए काफी व्यापक लचीलेपन के अवसर प्रदान करते हैं।

● विषय सामग्री का चयन

विषय सामग्री के चयन के लिए चार आधारभूत प्रक्रियाओं का प्रयोग किया जाता है—

1. निर्णयपरक प्रक्रिया
2. विश्लेषणात्मक प्रक्रिया
3. प्रयोगात्मक प्रक्रिया
4. सहमतिजन्य प्रक्रिया

● निर्णयपरक प्रक्रिया

निर्णयपरक प्रक्रिया अपनाते समय हमारे सामने कई प्रश्न आते हैं जैसे—

- (i) गणित शिक्षण के लक्ष्य और उद्देश्य क्या हैं? (ii) हमारे विद्यालयों में इन लक्ष्यों और उद्देश्यों की प्राप्ति किस सीमा तक हो रही है? (iii) वर्तमान स्थितियों में किस विषय सामग्री और किन अनुभवों से इन उद्देश्यों की प्राप्ति की सर्वाधिक संभावना है?

● विश्लेषणात्मक प्रक्रिया

इस प्रक्रिया में किसी व्यवसाय में कार्यरत व्यक्तियों के क्रिया-कलापों का अध्ययन किया जाता है। इसमें उनके द्वारा की जाने वाली क्रियाओं का विश्लेषण किया जाता है जिससे प्रयुक्त गणितीय विषय-वस्तु का पता लगाया जा सके। दैनिक जीवन की स्थितियों में गणित की उपयोगिता के अध्ययन के लिए विश्लेषणात्मक प्रक्रियाओं का व्यापक उपयोग किया जाता है।

● प्रयोगात्मक प्रक्रिया

जब हम गणित पाठ्यचर्या का निर्माण करते हैं, तो कई प्रश्न उठते हैं जैसे (i) क्या छोटे बच्चे गणित सीख सकते हैं? (ii) किस स्तर पर कौन-सी गणितीय विषय-वस्तु पढ़ाई जानी चाहिए? (iii) विनिर्दिष्ट आयु वर्ग के बच्चों के लिए किसी विशिष्ट विषय-वस्तु को किस सीमा तक व्यवहार में लाना चाहिए? (iv) क्या जल्दी और धीमी गति से सीखने वाले शिक्षार्थियों के लिए अलग-अलग विषय-वस्तु होनी चाहिए? इसी प्रकार के और भी कई प्रश्न उठते हैं।

● सहमतिजन्य प्रक्रिया

सहमतिजन्य प्रक्रिया में गणित पाठ्यचर्या के बारे में लोगों के विचार जानने की विधियां शामिल करते हैं। उनसे अन्तःक्रिया करते समय संबद्ध समस्याओं और मुद्दों पर विस्तृत चर्चा की जाती है ताकि निहित हितां, परम्परा और पूर्वाग्रहों के प्रभाव को कम से कम किया जा सके।

● पाठ्यचर्या विषय-वस्तु का श्रेणीकरण

गणित पाठ्यचर्या की विषय-वस्तु के चयन के बाद पाठ्यचर्या विषय-वस्तु के श्रेणीकरण का प्रश्न उठता है। विषय-वस्तु को विभिन्न श्रेणियों के लिए कई तरीकों से निर्दिष्ट किया जा सकता है। उनमें से एक तरीका शिक्षार्थियों की रुचि और परिपक्वता स्तर के अनुसार विषय-वस्तु का नियोजन करना है। दूसरा किसी विशेष कक्षा में विषय-वस्तु के नियोजन के बाद बच्चों को उस स्तर तक लाने का प्रयास करना है। तीसरे उपागम में प्रत्येक बच्चे की आवश्यकताओं और योग्यताओं की दृष्टि से विषय-वस्तु और क्रियाओं के अनुकूलन के लिए उद्देश्यों और लक्ष्यों को भी बदल दिया जाता है। इन उपागमों का अलग-अलग प्रयोग करने की अपेक्षा विषय-वस्तु के श्रेणी नियोजन के लिए संयुक्त रूप से इनका प्रयोग किया जाता है।

● प्राथमिक स्तर पर गणित-न्यूनतम अधिगम स्तर

प्राथमिक शिक्षा के सर्वव्यापीकरण के केन्द्र बिन्दु हैं- (क) सार्विक पढुंय- एक किलोमीटर की पैदल दूरी पर सभी शिक्षार्थियों के लिए प्राथमिक विद्यालय/ गैर औपचारिक शिक्षा-केन्द्र की उपलब्धता (ख) सार्विक प्रतिधारण-पांच वर्ष की पूरी अवधि के लिए विद्यालय नेटवर्क में सभी बच्चों का प्रतिधारण (बने रहना) (ग) सार्विक नामांकन-6 से 11 वर्ष के आयु वर्ग के सभी बच्चों को विद्यालय नेटवर्क में लाना।

न्यूनतम अधिगम स्तर प्रलेख में शिक्षा के प्राथमिक स्तर की पांचों कक्षाओं में से प्रत्येक के लिए प्रमुख गणितीय संकल्पनाओं को गणितीय दक्षताओं के निम्नलिखित पांच क्षेत्रों में वर्गीकृत किया गया है -

- ◆ पूर्णाकों और संख्याओं को समझना।
- ◆ पूर्ण संख्याओं को जोड़ने, घटाने, गुणा व भाग करने की योग्यता।
- ◆ भिन्न, दशमलव एवं प्रतिशत का प्रयोग करने की योग्यता।
- ◆ मुद्रा, लंबाई, भार (वजन), धारिता, क्षेत्र एवं समय की इकाइयों का उपयोग करने और इनसे संबंधित दैनिक जीवन की साधारण समस्याओं को हल करने की योग्यता।
- ◆ ज्यामितीय आकारों एवं स्थानिक संबंधों को समझना।

● दक्षताओं के संदर्भ में पाठ्यचर्या

पाठ्यचर्या को अनेक तरीकों से विनिर्दिष्ट किया जा सकता है। इसे प्रत्येक श्रेणी के लिए आनुक्रमिक ढंग से प्रस्तुत गणितीय विषय-वस्तु के रूप में भी अभिव्यक्त किया जा सकता है। शिक्षा के प्राथमिक स्तर के अंत में शिक्षार्थियों द्वारा प्राप्त अपेक्षित अधिगम प्रतिफलों के रूप में इसका वर्णन किया जा सकता है।

● पूर्णदक्षता अधिगम उपागम

न्यूनतम अधिगम स्तरों को प्राथमिक स्तर पर शिक्षा की गुणवत्ता में सुधार की दृष्टि से प्रवर्तित किया गया है। इस गुणवत्ता की अपेक्षा तभी की जा सकती है जब कक्षा 1 से 5 तक के सभी शिक्षार्थी उनके लिए निर्धारित सभी दक्षताओं पर अधिकार प्राप्त कर लें अर्थात् शिक्षार्थी उनसे पूछे गए लगभग सभी प्रश्नों के उत्तर देने में सक्षम हों। संक्षेप में, किसी कक्षा की दक्षता विशेष पर तभी पूर्णधिकार माना जायेगा जब कक्षा के कम से कम 80 प्रतिशत शिक्षार्थी 80 प्रतिशत दक्षता स्तर तक पहुँच गए हों। यह ध्यान रखें कि शेष 20 प्रतिशत शिक्षार्थियों को भी 80 प्रतिशत स्तर तक लाना है।

● सतत और व्यापक मूल्यांकन

शिक्षार्थी किसी विशिष्ट दक्षता का अर्जन तभी कर सकेगा जब उसने पूर्ववर्ती दक्षताओं पर पूर्णधिकार प्राप्त कर लिया हो। अतः नवीन दक्षता का शिक्षण सभी या लगभग सभी शिक्षार्थियों द्वारा वर्तमान दक्षता पर पूर्णधिकार प्राप्त कर लेने पर निर्भर करता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि मूल्यांकन सतत आधार पर होना चाहिए। वास्तविक व्यवहार में इसे शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया का अभिन्न अंग बनाया जाना चाहिए।

● गणित में दक्षता आधारित शिक्षण-अधिगम

दक्षता आधारित शिक्षण-अधिगम के लिए बाल-केन्द्रित उपागम को अपनाना होगा ताकि प्रत्येक बच्चे को पूर्णदक्षता स्तर तक लाया जा सके। इसके अतिरिक्त 6-11 वर्ष के आयु वर्ग के इन शिक्षार्थियों के लिए क्रिया-कलाप आधारित उपागम अनिवार्य है। तथापि, दक्षता के विकास के लिए चुने जाने वाले क्रिया-कलाप रोचक और सरल होने चाहिए। साथ ही यदि संभव हो तो तीव्र, मध्यम और मंद गति से सीखने वाले शिक्षार्थियों द्वारा भिन्न-भिन्न क्रिया-कलाप किए जाने चाहिए। इससे उन्हें अपनी-अपनी गति के अनुसार सीखने में मदद मिलेगी।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न : गणित अधिगम के पक्षों में सम्मिलित नहीं है-

- (a) प्रकार्यात्मक पक्ष (b) अनुशासनिक पक्ष
(c) सांस्कृतिक पक्ष (d) विकासात्मक पक्ष

उत्तर-(d)

उत्तर : विकासात्मक पक्ष गणित अधिगम पक्षों में सम्मिलित नहीं है जबकि गणित अधिगम के तीन पक्ष हैं- प्रकार्यात्मक, अनुशासनिक (विद्या शाखा) और सांस्कृतिक पक्ष।

प्रश्न : गणित अधिगम के तीनों पक्षों में से कौन-सा पक्ष वैज्ञानिक दृष्टिकोण के अन्तर्ग्रहण को प्रतिबिम्बित करता है?

- (a) प्रकार्यात्मक पक्ष (b) अनुशासनिक पक्ष
(c) सांस्कृतिक पक्ष (d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

उत्तर-(a)

उत्तर : गणित अधिगम के तीनों पक्षों में से प्रकार्यात्मक पक्ष वैज्ञानिक दृष्टिकोण के अन्तर्ग्रहण को प्रतिबिम्बित करता है।

प्रश्न : गणित अधिगम के प्रकार्यात्मक कार्यों में सम्मिलित नहीं है-

- (a) प्रतिशत/अनुपात (b) सारणी/ग्राफ
(c) रसबोध (d) सांख्यिकी

उत्तर-(c)

उत्तर : गणित अधिगम के प्रकार्यात्मक कार्यों में रसबोध सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न : कक्षा 1 से 5 तक गणित शिक्षण के उद्देश्यों में कौन सा सम्मिलित नहीं है?

- (a) शीघ्रता एवं शुद्धता से परिकलन करने की योग्यता
(b) सौन्दर्यशास्त्र का अभिज्ञान
(c) तार्किक ढंग से सोचने की योग्यता
(d) क्रम एवं प्रतिरूप पहचानने की योग्यता

उत्तर-(b)

उत्तर : कक्षा 1 से 5 तक गणित शिक्षण के उद्देश्यों में सौन्दर्यशास्त्र का अभिज्ञान सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न : कक्षा एक से पांच तक गणित की विषय-वस्तु के लिए सामाजिक, सांस्कृतिक एवं राजनीतिक बिंदुओं में कौन सा सम्मिलित नहीं है-

- (a) शिक्षा और अवसर की समानता (b) सांस्कृतिक विरासत का परिरक्षण
(c) परंपरागत प्रकरणों का अनुकूलन (d) भविष्योन्मुखी शिक्षा

उत्तर-(c)

उत्तर : कक्षा 1 से 5 तक गणित की विषय-वस्तु के लिए सामाजिक, सांस्कृतिक एवं राजनीतिक बिंदुओं में परंपरागत प्रकरणों का अनुकूलन सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न : गणित की विषय-वस्तु के चयन के लिए शिक्षाशास्त्रीय विचार बिंदुओं में कौन सा सम्मिलित नहीं है?

- (a) प्राथमिक स्तर के अनुरूप गणित का नवीन ज्ञान
(b) गणित में अन्तर्निहित रुचि और चुनौतियाँ
(c) सतत और व्यापक मूल्यांकन का प्रयोग
(d) चरित्र निर्माण और मूल्यों का अन्तर्ग्रहण

उत्तर-(d)

उत्तर : चरित्र निर्माण एवं मूल्यों का अन्तर्ग्रहण गणित की विषय-वस्तु के चयन के लिए शिक्षाशास्त्रीय विचार बिंदुओं में सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न : गणित की विषय सामग्री के चयन के लिए जिस आधारभूत प्रक्रिया का प्रयोग नहीं किया जाता है, वह है—

- (a) परंपरागत प्रक्रिया (b) निर्णयपरक प्रक्रिया
(c) विश्लेषणात्मक प्रक्रिया (d) प्रयोगात्मक प्रक्रिया

उत्तर—(a)

उत्तर : परंपरागत प्रक्रिया का प्रयोग गणित विषय सामग्री के चयन के लिए नहीं किया जा सकता है।

प्रश्न : कक्षा एक से पांच तक गणित में न्यूनतम अधिगम स्तर सार्विक नामांकन की उम्र सीमा क्या है?

- (a) 7-12 वर्ष (b) 6-11 वर्ष (c) 8-13 वर्ष (d) 5-10 वर्ष

उत्तर—(b)

उत्तर : कक्षा 1 से 5 तक गणित में न्यूनतम अधिगम स्तर सार्विक नामांकन की उम्र सीमा 6-11 वर्ष है।

प्रश्न : कक्षा एक से पांच तक न्यूनतम अधिगम स्तर की पहचान के लिए 1990 में मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार द्वारा किसकी अध्यक्षता में एक समिति गठित की गई थी?

- (a) प्रो. आर. एच. दवे (b) प्रो. गाडगिल
(c) प्रो. एस. एच. दवे (d) प्रो. महालनोबिस

उत्तर—(a)

उत्तर : वर्ष 1990 में मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार द्वारा कक्षा एक से पांच तक न्यूनतम अधिगम स्तर की पहचान के लिए प्रो. आर.एच. दवे की अध्यक्षता में एक समिति का गठन किया गया।

प्रश्न : प्राथमिक स्तर (कक्षा एक से पांच) पर प्राथमिक शिक्षा के सर्वव्यापीकरण के केंद्र बिन्दु में सम्मिलित नहीं है—

- (a) सार्विक पहुंच (एक किमी. पहुंच तक सभी शिक्षार्थियों के लिए प्राथमिक विद्यालय की उपलब्धता)
(b) सार्विक नामांकन
(c) सार्विक प्रतिधारण
(d) सार्विक निरपेक्षता

उत्तर—(d)

उत्तर : सार्विक निरपेक्षता को प्राथमिक स्तर पर प्राथमिक शिक्षा के सर्वव्यापीकरण के केंद्र बिंदु में सम्मिलित नहीं किया गया है।

प्रश्न : किस राष्ट्रीय शिक्षा नीति में सार्विक प्राथमिक शिक्षा में एक अन्य आयाम सार्विक संप्राप्ति जोड़ा गया?

- (a) मुक्त शिक्षा कार्यक्रम, 1979
(b) राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986
(c) सर्वशिक्षा अभियान, 2001
(d) महिला शिक्षा और सशक्तिकरण, 2009

उत्तर—(b)

उत्तर : राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986 में सार्विक प्राथमिक शिक्षा में एक अन्य आयाम सार्विक संप्राप्ति जोड़ा गया।

प्रश्न : न्यूनतम अधिगम स्तर प्रलेख में गणितीय दक्षताओं के पांच क्षेत्रों में सम्मिलित नहीं हैं—

- (a) पूर्णांकों और संख्याओं को समझना
(b) भिन्न, दशमलव एवं प्रतिशत प्रयोग की योग्यता
(c) ज्यामितीय आकारों एवं स्थानिक संबंधों को समझना
(d) सहमतिजन्य योग्यता

उत्तर—(d)

उत्तर : सहमतिजन्य योग्यता न्यूनतम अधिगम स्तर प्रलेख में गणितीय दक्षताओं के क्षेत्रों में सम्मिलित नहीं किया गया।

□ प्राइमरी गणित : पाठ आयोजना

● प्रस्तावना

आप इस बात से सहमत होंगे कि किसी भी क्रिया की सफलता उसकी आयोजना पर निर्भर करती है। क्रियाओं की समुचित आयोजना से ही लाभदायक परिणाम प्राप्त होते हैं। यही बात शिक्षण के लिए भी सत्य है। शिक्षक होने के कारण आपको किसी कक्षा को गणित पढ़ाने का दायित्व सौंपा गया है। आपको अपना पाठ्यक्रम निर्धारित समय-सीमा में पूरा करना होगा और बच्चों में प्रभावी अधिगम को भी सुनिश्चित करना होगा। अब आपके सम्मुख इसे सफलतापूर्वक पूर्ण करने की चुनौती है। इसका विचार मात्र ही पाठ्यचर्या के मर्दों के क्रम निर्धारण, व्यवस्था, प्रबंध और वर्गीकरण तथा निर्धारित समय-सीमा के साथ तालमेल और बच्चों के साथ की जाने वाली उपयुक्त क्रियाओं के अभিনিर्धारण के संबंध में आत्मचिंतन की प्रक्रिया को उत्प्रेरित करेगा। यह सब शिक्षण के लिए आयोजना ही है।

उद्देश्य :

- ◆ इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप,
 - ◆ इकाई और पाठ आयोजना की आवश्यकता और महत्व को पहचान सकेंगे।
 - ◆ इकाई आयोजना के विविध चरणों की सूची बना सकेंगे।
 - ◆ दी गई किसी एक इकाई के शिक्षण के लिए इकाई योजना का निर्माण कर सकेंगे।
 - ◆ पाठ आयोजना के विविध चरणों को सूचीबद्ध कर सकेंगे।
 - ◆ गणित पाठों के शिक्षण के लिए पाठ योजनाओं का निर्माण कर सकेंगे।

● इकाई आयोजना

गणित की पाठ्यचर्या आपको विषय-वस्तु/संकल्पनाओं या दक्षताओं के रूप में उपलब्ध हो सकती है। अतः गणितीय विषय-वस्तु और प्रक्रियाओं के क्रियान्वयन के संबंध में बच्चों में बोध और कौशलों के अर्जन को सुनिश्चित करना आपका लक्ष्य होना चाहिए। दूसरे शब्दों में आपका उद्देश्य अपने शिक्षार्थियों में गणितीय संकल्पनाओं का विकास करना होगा। आपको शायद याद हो कि 'प्राथमिक स्तर पर न्यूनतम अधिगम स्तर' शीर्षक वाले प्रलेख में आवश्यक दक्षताओं को गणितीय अधिगम के पांच प्रमुख क्षेत्रों के अन्तर्गत सूचीबद्ध किया गया है।

● इकाई आयोजना का अर्थ

गणित की इकाई में अन्तःसम्बद्ध अनेक दक्षताओं/संकल्पनाओं/विषय-वस्तु का एक खंड समाविष्ट होता है जिसके कुछ सामान्य आधार या अभिलक्षण होते हैं। अतः गणितीय अधिगम के किसी भी क्षेत्र के अन्तर्गत अनेक इकाइयां बनाई जा सकती हैं। दक्षताओं/विषय-वस्तु की प्रकृति, गणित शिक्षण के बारे में शिक्षक का अनुभव और छात्रों की अधिगम शैलियों के बारे में अपने प्रत्यक्षण के आधार पर कोई शिक्षक इकाइयों के निरूपण के बारे में निर्णय ले सकता है।

गणितीय दक्षताओं को श्रेणीकृत रूप से व्यवस्थित करने और कक्षा क्रियान्वयन के प्रयोजनों के लिए विभाजित कर लेने के बाद आपको उसे बच्चों तक संप्रेषित करने के तरीकों के विषय में सोचना होगा। स्पष्टतः इसके लिए आपको किसी इकाई के अन्तर्गत पाठों के अनुक्रम, शिक्षण विधि,

अनुदेशन सहायक सामग्री, शिक्षार्थी क्रियाएं और मूल्यांकन प्रक्रिया के बारे में विचार करना पड़ेगा। इस निश्चय की व्यवस्थित प्रस्तुति ही इकाई योजना में प्रतिफलित होगी।

इकाई आयोजना की आवश्यकता और महत्व—आप जानना चाहेंगे कि हमें इकाई योजना की क्या आवश्यकता है अथवा क्या हम इकाई योजना के बिना काम नहीं चला सकते? इसका उत्तर निम्न बिन्दुओं के तहत स्पष्ट किया गया है कि इकाई आयोजना से शिक्षक का कार्य किस प्रकार सरल और प्रभावी रीति से हो जाता है—

- ♦ इससे शिक्षकों को शिक्षण-अधिगम की समग्र दृष्टि प्राप्त होती है जिससे उन्हें उपलब्ध समय और संसाधनों की व्यवस्था में सहायता प्राप्त हो सकती है।
- ♦ यह पाठ्य पुस्तक की विषय-वस्तु के कक्षा में अधिगम के लिए ली जाने वाली दक्षताओं से सहसंबंध स्थापित करने के अवसर प्रदान करती है।
- ♦ यह पाठ्यक्रम की विषय-वस्तु के विविध पक्षों या संदर्भगत दक्षता पर संतुलित बल देने में सहायता करती है।
- ♦ यह शिक्षार्थियों के इकाईवार मूल्यांकन और आवश्यकतानुसार उपचारात्मक शिक्षण की व्यवस्था और समुन्नयन उपाय करने में सहायक हो सकती है।

इकाई आयोजना के चरण—इकाई आयोजना में दो प्रक्रियाएं शामिल हैं—अनुक्रमण और चयन। बच्चों के प्रभावी अधिगम को सुनिश्चित करना इकाई आयोजना का केन्द्र बिन्दु होना चाहिए। इकाई निर्माण की संपूर्ण प्रक्रिया को अन्तर्ज्ञानात्मक तरीकों पर नहीं छोड़ा जा सकता है। अतः इस संबंध में नीचे सुझाए गए कुछ चरण उपयोगी होंगे—

- ♦ वार्षिक पठन-पाठन के दौरान कक्षा के लिए संपूर्ण पाठ्यक्रम विषय-वस्तु/दक्षता समुच्चय का आकलन,
- ♦ शिक्षकों के लिए उपलब्ध शिक्षण समय का आकलन,

- ♦ दी गई पाठ्यक्रम विषय-वस्तु/दक्षता समुच्चय का शिक्षण-अधिगम अनुक्रम में व्यवस्थापन,
- ♦ पाठ्यक्रम विषय-वस्तु/दक्षताओं के अन्तर्संबंधित पक्षों की पहचान,
- ♦ सम्पूर्ण पाठ्यक्रम विषय-वस्तु दक्षताओं का इकाइयों में वितरण, जिसके लिए आपको निम्नलिखित बातों पर ध्यान देना होगा—
 - (i) इकाई न तो बहुत छोटी होनी चाहिए और न ही लंबी,
 - (ii) इकाई के अपने घटकों के बीच कुछ सामान्य तत्व होने चाहिए,
 - (iii) इकाई ऐसी होनी चाहिए कि कक्षा में उसे पूरा करने के लिए एक महीने से अधिक समय न लगे, तथा प्रत्येक सूचीबद्ध इकाई को आगे शिक्षण पाठों में विभाजित करना अपेक्षित होगा,
- ♦ इन निश्चयों और विभाजन का सारणी रूप में प्रस्तुतीकरण, जिसे इकाई योजना माना जा सके।

इकाई योजना का निर्माण—इकाई योजना का निर्माण विभिन्न व्यक्तियों द्वारा विभिन्न प्रकार से किया जा सकता है। किन्तु इकाई योजना बनाते समय बच्चों में दक्षता का विकास ही मुख्य ध्यातव्य बिंदु होना चाहिए। इकाई आयोजना का एक तरीका यह हो सकता है कि किसी कक्षा को दस महीने की अवधि में किसी क्षेत्र के अन्तर्गत दी गई जितनी दक्षताएं पढ़ाना है उनका क्षेत्रानुसार योजनागत विभाजन कर लिया जाए। अतः सैद्धान्तिक रूप से कहा जा सकता है कि कम से कम पांच इकाइयां हों और प्रत्येक इकाई एक-एक क्षेत्र पर केन्द्रित हो। किंतु ऐसा करना व्यावहारिक नहीं होगा, क्योंकि प्रत्येक दक्षता वर्ग, दक्षताओं की संख्या काफी ज्यादा है इसलिए आगे भी विभाजन की आवश्यकता होगी। व्यावहारिक कारणों से प्रत्येक क्षेत्र में 10 से अधिक दक्षताएं नहीं होनी चाहिए और उन्हें पढ़ाने के लिए 20 कार्यदिवसों से अधिक समय लगाने की योजना नहीं होनी चाहिए।

इकाई योजना

इकाई योजना संख्या..... शिक्षक का नाम.....

विषय : गणित

वर्ग-I (पूर्णांकों और संख्याओं का बोध):

दक्षताएं : 1.3.1 (100 से 1000 तक के संख्याओं की पहचान और लिखना) 1, 3, 2 (1 से 1000 तक गिनती लिखना)						
क्रम संख्या	दक्षता	पाठ संख्या	शिक्षण विधि	शिक्षण उपकरण	शिक्षार्थी क्रियाएं	मूल्यांकन
1.	1.3.1 (क) 100 से 999 तक के संख्यांक पहचानता है (ख) 1000 तक के संख्यांक पहचानता है (ग) 100 से 1000 तक के संख्यांक लिखता है	1 से 3 3 4	लेखविधि और निदर्शन विधि वही वही	फ्लैश कार्ड वही वही	विभिन्न खेल और समूह कार्य वही वही	मौखिक परीक्षण वही मौखिक और लिखित परीक्षण
2.	1.3.2 1 से 1000 तक गिनती लिखना	5 से 6	वही	वही	वही	मौखिक और लिखित परीक्षण

● पाठ आयोजना

जी. एच. ग्रीन के अनुसार, जिस शिक्षक ने अपने विषय और अपनी कक्षा से संबंधित पाठ को बुद्धिमत्तापूर्ण ढंग से आयोजित कर लिया है, वह बिना किसी चिंता के अत्यंत आत्मविश्वास के साथ अपने कार्य को पूरी तरह समझते हुए उसे व्यावहारिक अंजाम तक पहुंचाने में समर्थ होगा क्योंकि वह आने वाली कठिनाइयों का पूर्वानुमान कर चुका होता है और उसने स्वयं को उनका सामना करने के लिए तैयार कर लिया होता है।

● पाठ आयोजना का अर्थ

पाठ आयोजना शिक्षक द्वारा कक्षा में किए जाने वाले कार्य के विविध चरणों की विस्तृत रूपरेखा प्रस्तुत करती है। अतः पाठ आयोजना एक कालांश में शिक्षण से संबद्ध होती है। पाठ आयोजना का अर्थ कक्षा में शिक्षण के लिए किसी पाठ के अनुक्रम और प्रस्तुतीकरण की शैली तथा प्रयोग में लाई जाने वाली मूल्यांकन प्रक्रिया का अभिनिर्धारण है। अतः यह एक ऐसी अग्रिम योजना है जो एक कालांश में किसी शिक्षण-कार्य के 'क्यों', 'क्या' और 'कैसे' के बीच संबंध स्थापित करती है।

● पाठ आयोजना की आवश्यकता और महत्त्व

जब आप कक्षा में किसी पाठ को पढ़ाने के लिए जाते हैं, तो उसके लिए तैयारी करके जाते हैं, चाहे वह तैयारी अनौपचारिक ही क्यों न हो। पर कभी-कभी आपको यह लगता है कि आप तैयार की गई सारी विषय-वस्तु का शिक्षण नहीं कर पाए, या दूसरी ओर शिक्षणार्थ ली गई विषय-वस्तु पूरे कालांश के लिए पर्याप्त नहीं थी। कभी-कभी आप शिक्षण के दौरान अटक जाते हैं और परेशान हो उठते हैं। हो सकता है कि आप पाठ के शिक्षण उद्देश्यों से अवगत न हों इसलिए आपने उनकी प्राप्ति की कोई परवाह नहीं की। पाठ आयोजना करते समय आपको इन सभी समस्याओं के बारे में पहले से सोचने और संभावित अवरोधों के लिए संशोधक उपाय करने का अवसर मिलता है।

पाठ आयोजना शिक्षक की निम्नलिखित रूपों में मदद करती हैं—

- ◆ यह शिक्षण को योजनाबद्ध और सुव्यवस्थित बनाती है।
- ◆ यह पाठ के लिए पर्याप्त विषय-वस्तु की पहचान करने और उसके उपयुक्त क्रमायोजन करने में शिक्षक की सहायता करती है।
- ◆ यह बच्चों की अधिगम संबंधी कठिनाइयों का पूर्वानुमान लगाने और उन्हें सुलझाने में शिक्षक की सहायता करती है।
- ◆ यह शिक्षक को इस योग्य बनाती है कि वह उपलब्ध समय का समुचित प्रयोग कर सके।
- ◆ यह बच्चों की अधिगम आवश्यकताओं और योग्यताओं के बारे में अन्तर्दृष्टि विकसित करने में सहायता प्रदान करती है।
- ◆ यह शिक्षक में तात्कालिक संशोधक उपाय अपनाने की आदत विकसित करने में सहायक होती है।
- ◆ यह शिक्षण के दौरान शिक्षक को आत्मविश्वासी बनाती है।

● पाठ आयोजना की प्रणालियां

पाठ की आयोजना अनेक प्रकार से की जा सकती है, इसलिए अनेक प्रणालियां विकसित की गई हैं। हरबर्टीय प्रणाली सर्वाधिक उपयुक्त प्रणाली है। हरबर्टीय प्रणाली में पाठ आयोजना के चरण निम्नलिखित हैं—

1. प्रस्तावना
2. प्रस्तुतीकरण

3. साहचर्य (या तुलना)

4. सामान्यीकरण

5. अनुप्रयोग

6. पुनरावृत्ति, और

7. गृहकार्य

● अच्छी पाठ योजना की विशिष्टताएं

- ◆ पाठ आयोजना के माध्यम से शिक्षक अपने लिए पाठ विशेष के शिक्षण उद्देश्य को सुनिर्दिष्ट कर सकेगा।
- ◆ इससे शिक्षक को यह पता चल जाता है कि क्या उपलब्ध विषय-वस्तु कालांश के दौरान क्रियान्वयन के लिए पर्याप्त है।
- ◆ शिक्षक पहले से ही शिक्षार्थियों द्वारा की जाने वाली क्रियाओं को पहचान लेता है।
- ◆ शिक्षक शिक्षार्थियों के संभावित उत्तरों का पूर्वानुमान लगा लेता है।
- ◆ योजना न तो अधिक छोटी और न ही अधिक लंबी होनी चाहिए।
- ◆ छोटे बच्चों के लिए आयोजित क्रिया-कलाप पर्याप्त रोचक होने चाहिए।
- ◆ इसे बच्चों में रहने की प्रवृत्ति पर केन्द्रित न होकर उनमें स्पष्ट बोध के विकास पर केन्द्रित होना चाहिए।

● पाठ योजना निर्माण

पाठ आयोजना के चरणों और पूर्ववर्ती अनुभागों में विवेचित विधियों को ध्यान में रखते हुए पाठ योजनाओं का निर्माण किया जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरण पाठ आयोजना के कुछ उपागमों को निर्देशित करेंगे। आप वांछित दक्षता और पूर्वानुमानित शिक्षण-अधिगम स्थिति के अनुरूप इन्हें अपनाकर पाठ योजनाओं का निर्माण करना सीख सकते हैं—

पाठ योजना

विद्यालय का नाम : क ख ग	तिथि : 13/09/2018
कक्षा : तृतीय	अवधि : 40 मिनट
विषय : गणित	कालांश : II
प्रकरण : तीन अंकों की	दक्षता : शिक्षार्थी तीन अंकों
संख्याओं का	के संख्याओं में अंकों का
स्थानीय मान	स्थानीय मान बता सकेंगे।

● पाठ के सामान्य उद्देश्य :

संख्याओं में अंकों के स्थानीय मान का बोध विकसित करना।

● पाठ के विशिष्ट उद्देश्य :

शिक्षार्थी तीन अंकों वाली संख्याओं में अंकों का स्थानीय-मान बता सकेंगे।

- शिक्षण/अनुदेशन सामग्री : ◆ सामान्य कक्षा सामग्री
- ◆ स्पाइक ऐबेकस (गिनतारा)
 - ◆ इकाई, दहाई, सैकड़ों में चिह्नित तीन अंकों की संख्याएं दर्शाता चार्ट
 - ◆ तीन अंकों की संख्याओं युक्त फ्लैश कार्ड

पूर्वज्ञान : (i) शिक्षार्थी 1 से 1000 तक की संख्याएं पहचानते और लिखते हैं।

(ii) शिक्षार्थी दो अंकों की संख्या में अंकों का स्थानीय मान बताते हैं।

(iii) शिक्षार्थी तीन अंकों की संख्याओं के नाम लिखते हैं।

● प्रस्तावना :

शिक्षक शिक्षार्थियों से कुछ प्रश्न पूछेगा :

(श्यामपट्ट पर दो अंकों की कुछ संख्याएं लिखते हुए)

1. श्यामपट्ट पर कौन-सी संख्याएं लिखी हैं? 34, 40, 39
2. 34 में कौन-सी संख्या इकाई को दर्शाती है?
3. 34 में कौन-सी संख्या दहाई को प्रस्तुत करती है?
4. 34 में संख्यांक 4 का स्थानीय-मान क्या है?
5. 34 में संख्यांक 2 का स्थानीय-मान क्या है?
(शिक्षक संख्यांक 40 और 39 के लिए भी इसी प्रकार के प्रश्न पूछ सकता है)
6. 346 में 3 का स्थानीय-मान क्या है?

उद्देश्य कथन : बच्चों आज हम 3 अंकों की संख्याओं में संख्याओं के स्थानीय-मान का अध्ययन करेंगे।

● शिक्षक-शिक्षार्थी क्रियाएं

(3 अंकों की संख्याओं वाला फ्लैश कार्ड दिखाते हुए)

1. फ्लैश कार्ड पर कौन-सा संख्यांक दर्शाया गया है?

2. इस संख्या (346) के लिए संख्या नाम लिखिए (तीन सौ छियालिस)
(संख्यांक 3 को छुपाते हुए)
3. अब कौन-सा संख्यांक बचा है? (छियालिस)
(फिर से फ्लैश कार्ड दिखाते हुए)
4. दाहिनी ओर से तीसरे स्थान पर कौन-सा संख्यांक है?
(संख्याओं को उनकी संख्या 346 और 46 से पढ़ते हुए संख्याओं की तुलना करने के लिए कहना)
5. 46 की तुलना में 346 बोलते हुए आपको उसके (46 के) अतिरिक्त और क्या बोलना पड़ा?

● शिक्षक कथन

(आपको दाहिनी ओर से तीसरे स्थान पर संख्यांक 3 की स्थिति के कारण तीन सौ कहना पड़ता है)

शिक्षक अब तीन अंकों की संख्याओं के 3-4 उदाहरण लेगा और शिक्षार्थियों को सहभागी बनाते हुए स्थानीय मान का चार्ट भरवाएगा।

3 अंकों के संख्यांक	स्थानीय मान					
	सैकड़ा		दहाई		इकाई	
	संख्यांक	स्थानीय मान	संख्यांक	स्थानीय मान	संख्यांक	स्थानीय मान
346	3	300	4	40	6	6
859	8	800	5	50	9	9
583	5	500	8	80	3	3
708	7	700	0	00	8	8

यदि शिक्षार्थियों को कठिनाई महसूस हो रही हो, तो शिक्षक फ्लैश कार्ड का प्रयोग करते हुए चार्ट पर आगे और चर्चा करें। शिक्षार्थियों की सहायता के लिए नीचे दिखाया गया एक अन्य व्याख्यात्मक चार्ट निर्मित किया जा सकता है।

3 अंकों के संख्यांक	स्थानीय मान								
	दाईं ओर से तीसरा स्थान			दाईं ओर से दूसरा स्थान			दाईं ओर से पहला स्थान		
	संख्यांक	स्थान	स्थानीय मान	संख्यांक	स्थान	स्थानीय मान	संख्यांक	स्थान	स्थानीय मान
864	8	सैकड़ा	$8 \times 100 = 800$	6	दहाई	$6 \times 10 = 60$	4	इकाई	$4 \times 1 = 4$
662	6	सैकड़ा	$6 \times 100 = 600$	6	दहाई	$6 \times 10 = 60$	2	इकाई	$2 \times 1 = 2$
508	5	सैकड़ा	$5 \times 100 = 500$	0	दहाई	$0 \times 10 = 00$	8	इकाई	$8 \times 1 = 8$
320	3	सैकड़ा	$3 \times 100 = 300$	2	दहाई	$2 \times 10 = 20$	0	इकाई	$0 \times 1 = 0$

● सामान्यीकरण

शिक्षक उपर्युक्त उदाहरणों के आधार पर निम्नलिखित के सामान्यीकरण में बच्चों की सहायता करें -

- (i) दाहिनी ओर से पहले स्थान पर अंक का स्थानीय-मान उसी अंक से दर्शाया जाता है।
- (ii) दाहिनी ओर से दूसरे स्थान पर अंक का स्थानीय-मान उस अंक का दस गुना होता है।
- (iii) दाहिनी ओर से तीसरे स्थान पर अंक का स्थानीय-मान उस अंक का सौ गुना होता है।

- (vi) जैसे-जैसे हम दाहिनी ओर से बाईं ओर बढ़ते हैं संख्यांक में अंकों का स्थानीय-मान दस गुना बढ़ जाता है।

3 का स्थानीय मान

23 में 3 का स्थानीय मान 3 है।

34 में 3 का स्थानीय मान 3×10 है।

347 में 3 का स्थानीय मान 3×100 है।

● पुनरावृत्ति :

1. 128 में 2 का स्थानीय-मान क्या है?
उत्तर: 20

2. 12 में 2 का स्थानीय-मान क्या है?

उत्तर: 2

3. 247 में 2 का स्थानीय-मान क्या है?

उत्तर: 200

4. 854 में संख्याओं के स्थानीय-मान बताइये।

संख्यांक	स्थानीय-मान
8	800
5	50
4	4

● गृह कार्य :

3 अंकों की निम्नलिखित संख्याओं 292, 308, 887, 658 में अंकों के स्थानीय-मान बताइये।

पाठ योजना-2

विद्यालय का नाम : क ख ग तिथि : 14/09/2018

कक्षा : पांचवीं अवधि : 40 मिनट

विषय : गणित कालांश : तीसरा

प्रकरण : घनाभ का आयतन

दक्षता : शिक्षार्थी घनाभ के आयतन का परिकलन करते हैं।

पाठ के सामान्य उद्देश्य : शिक्षार्थियों में चिंतन और तर्कशक्ति का विकास करना।

पाठ के विशिष्ट उद्देश्य :

- शिक्षार्थी आयतन की संकल्पना को समझ सकेंगे।
- शिक्षार्थी घनाभ के आयतन का सूत्र जान सकेंगे।
- शिक्षार्थी घनाभ के आयतन के सूत्र को संगत समस्याओं पर लागू कर सकेंगे।

● प्रस्तुतीकरण

शिक्षक-शिक्षार्थी क्रियाएं	
1 सेमी. घन दिखाते हुए (लम्बा, चौड़ा, मोटा)	- इस ठोस की विमाएं क्या हैं? - घन और घनाभ में क्या अन्तर है? - इसकी आकृति कैसी है?
1 सेमी. घन दिखाते हुए	शिक्षक कथन ‘इसे घन कहते हैं।’ घन की तीनों विमाएं एक समान होती हैं जबकि घनाभ में ये अलग-अलग हो सकती हैं? - इस घन का आयतन क्या है? ‘आइये इसे अंशांकित सिलिण्डर की सहायता से मापें’ जल स्तर का प्रारंभिक पठन किया जायेगा और फिर ठोस को उसमें डुबाया जायेगा। पानी एक घन सेमी. बढ़ जाएगा। - इस घन की विमाएं क्या हैं?
साबुन का घनाभ दिखाते हुए	उत्तर : लंबाई = 1 सेमी., चौड़ाई = 1 सेमी., ऊंचाई = 1 सेमी - इस घन का आयतन क्या है? - इस घनाभ की विमाएं क्या हैं?
	उत्तर : एक घन सेमी. है। (एक घन सेमी. आयतन की इकाई माना जाता है।) उत्तर : लंबाई = 6 सेमी., चौड़ाई = 4 सेमी., ऊंचाई = 3 सेमी. इसकी लंबाई, चौड़ाई और मोटाई को क्रमशः कितने भागों में बांटा गया है?
	उत्तर—(i) लंबाई को छः भागों में बांटा गया है।

● शिक्षण/अनुदेशन सामग्री :

- सामान्य कक्षा सामग्री
- वर्ग और आयत के आरेख वाला चार्ट
- विभिन्न विमाओं के दो घनाभ
- घनाभाकार आकृति का एक डिब्बा
- अंशांकित सिलिण्डर
- किसी ठोस घन का एक सेंटीमीटर का टुकड़ा

● पूर्व ज्ञान

शिक्षार्थी वर्ग और आयत के क्षेत्रफल की संकल्पना जानते हैं।

● प्रस्तावना :

उनके पूर्व ज्ञान परीक्षण और उन्हें नए पाठों के लिए तैयार करने के लिए निम्नलिखित प्रश्न पूछे जाएंगे:-

- (चार्ट में वर्ग का आरेख दिखाते हुए) आप इस आरेख का क्षेत्रफल कैसे निकालेंगे?
- (आयत का आरेख दिखाते हुए) आप इस आरेख का क्षेत्रफल कैसे निकालेंगे?
- (टीन का डिब्बा दर्शाते हुए) यदि आपको यह बताना हो कि टीन के इस डिब्बे में कितना तेल आ सकता है, तो आप कैसे बतायेंगे?
- टीन के डिब्बे या टंकी में कितना स्थान है?
- यदि आप कहना चाहते हैं कि टंकी में इतना पानी आ सकता है, तो आप कैसे बताएंगे?
- (घनाभ दिखाते हुए) आप इस ठोस को क्या नाम देंगे?
- आप इस घनाभ का स्थान या आयतन कैसे ज्ञात करेंगे?

● उद्देश्य कथन

शिक्षार्थी अंतिम प्रश्न का उत्तर नहीं दे पाएंगे और शिक्षक कहेगा, “आज हम घनाभ का आयतन निकालने की विधि ज्ञात करेंगे।” साथ ही साथ उद्देश्य श्यामपट्ट पर लिखा जाएगा।

(ii) चौड़ाई को 4 भागों में बांटा गया है।

(iii) मोटाई को 3 भागों में बांटा गया है।

शिक्षक इस घनाभ को विभाजक रेखाओं के साथ तुरन्त काटेगा। (इससे 72 भाग प्राप्त होंगे).....(i)

9. प्रत्येक छोटे भाग की आकृति क्या है?

उत्तर-घन है।

10. इस छोटे घन की विमाएं क्या हैं?

उत्तर-लंबाई : 1 सेमी., चौड़ाई : 1 सेमी., मोटाई : 1 सेमी.

11. इस छोटे घन का आयतन क्या है?

उत्तर-एक घन सेमी. है।

(शिक्षार्थियों को पहले दिखाए गए समान घन से इस घन की तुलना की जाएगी)

12. पूरे घनाभ का आयतन क्या है?

उत्तर-घनाभ का आयतन
= 30 घन सेमी. है।(ii)

● सामान्यीकरण

1. पहली स्थिति में विमाएं क्या हैं?

लंबाई = 6 सेमी.

चौड़ाई = 4 सेमी.

मोटाई या ऊंचाई = 3 सेमी.

2. इस स्थिति में आयतन क्या है? उत्तर :- आयतन = $6 \times 4 \times 3 = 72$ घन सेमी.

3. आयतन और विमाओं में क्या संबंध है? उत्तर:- आयतन इन तीनों विमाओं का गुणनफल है।

घनाभ का आयतन = लंबाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊंचाई

● पुनरावृत्ति :

1. आयतन से आपका क्या अभिप्राय है?

2. घन और घनाभ में क्या अन्तर है?

3. घनाभ के आयतन का सूत्र क्या है?

4. विभिन्न स्थितियों में आयतन ज्ञात करने की क्या आवश्यकता है?

● गृहकार्य :

1. आपकी कक्षा में हवा का आयतन क्या होगा यदि उसकी विमाएं निम्नलिखित हों;

लंबाई = 7 मी.

चौड़ाई = 6 मी.

ऊंचाई = 3.5 मी.

● पाठ आयोजना की परिसीमाएं

◆ यह शिक्षण को व्यवस्थित परंतु अनम्य बनाती है।

◆ इस पर अत्यधिक बल पाठ को नेमी बना सकता है।

◆ यह प्रारंभिक शिक्षकों के लिए अच्छा है। अनुभवी शिक्षक संरक्षित कक्षा व्यवहारों में सामान्यतः कम निष्ठा रखते हैं।

◆ इसका कठोरता से पालन किया जाए, तो शिक्षक के लिए नई सूझों की कोई गुंजाइश नहीं रहती।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. किसी इकाई के अन्तर्गत पाठों के अनुक्रम, शिक्षण विधि, अनुदेशन सहायक सामग्री, शिक्षार्थी क्रियाएं और मूल्यांकन प्रक्रिया इस निश्चय की व्यवस्थित प्रस्तुति कहलाती है-

(a) इकाई योजना (b) पाठ योजना

(c) सामान्य योजना (d) प्रस्तुतीकरण

उत्तर-(a)

उत्तर : किसी इकाई के अंतर्गत पाठों के अनुक्रम, शिक्षण विधि, अनुदेशन सहायक सामग्री, शिक्षार्थी क्रियाएं और मूल्यांकन प्रक्रिया की व्यवस्थित प्रस्तुति इकाई योजना कहलाती है।

प्रश्न 2. इकाई आयोजना के चरणों में सम्मिलित नहीं है-

(a) वर्ष के दौरान कक्षा के लिए संपूर्ण पाठ्यक्रम विषय-वस्तु/दक्षता समुच्चय का आकलन,

(b) शिक्षकों के लिए उपलब्ध शिक्षण समय का आकलन,

(c) दी गई पाठ्यक्रम विषय-वस्तु/दक्षता समुच्चय का शिक्षण-अधिगम अनुक्रम में व्यवस्थापन,

(d) शिक्षक और शिक्षार्थियों में उपलब्धि की भावना को विकसित न करना

उत्तर-(d)

उत्तर : शिक्षक और शिक्षार्थियों में उपलब्धि की भावना को विकसित न करना इकाई आयोजन के चरणों में सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न 3. इकाई आयोजना की परिसीमाओं में सम्मिलित नहीं हैं?

(a) कभी-कभी शिक्षण-अधिगम उपागम का पहले से स्पष्ट पूर्वानुमान लगाना कठिन होता है।

(b) विषय-वस्तु/दक्षताओं का विभाजन कृत्रिम होता है।

(c) वर्ष के दौरान विकसित दक्षताओं का खण्डशः बोध होता है।

(d) इसका कड़ाई से पालन करने पर शिक्षक की नम्यता पर अंकुश नहीं लगता है।

उत्तर-(d)

उत्तर : इकाई आयोजन का कड़ाई से पालन करने पर शिक्षक की नम्यता पर अंकुश नहीं लगता है। इकाई आयोजन की परिसीमाओं में सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न 4. "जिस शिक्षक ने अपने विषय और अपनी कक्षा से संबंधित पाठ को बुद्धिमतापूर्ण ढंग से आयोजित कर लिया है, वह बिना किसी चिंता के अत्यंत आत्मविश्वास के साथ अपने कार्य को समझते हुए उसे एक व्यावहारिक अंजाम तक पहुंचाने में समर्थ होगा।" यह कथन है-

- (a) जी. एच. राय (b) महात्मा गांधी
(c) जी.एच. ग्रीन (d) आईस्टीन

उत्तर-(c)

उत्तर : उपरोक्त कथन जी.एच. ग्रीन का है।

प्रश्न 5. पाठ आयोजना की हरबर्टीय प्रणालियों में कौन सी प्रणाली सम्मिलित नहीं है?

- (a) प्रस्तावना (b) प्रस्तुतीकरण
(c) साहचर्य (या तुलना) (d) उद्देश्य

उत्तर-(d)

उत्तर : पाठ आयोजन की हरबर्टीय प्रणालियों में उद्देश्य प्रणाली सम्मिलित नहीं है।

प्रश्न 6. घन की तीनों विमाएं होती हैं-

- (a) असमान (b) एकसमान
(c) लंबाई अधिक होती है (d) चौड़ाई अधिक होती है

उत्तर-(b)

उत्तर : घन की तीनों विमाएं एक समान होती हैं।

प्रश्न 7. घनाभ में सम्मिलित नहीं है-

- (a) लंबाई (b) चौड़ाई
(c) ऊंचाई (d) त्रिज्या

उत्तर-(d)

उत्तर : घनाभ में त्रिज्या नहीं होती जबकि घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई होती है।

प्रश्न 8. घनाभ के आयतन का सूत्र है-

- (a) लंबाई × चौड़ाई × ऊंचाई (b) (लंबाई + चौड़ाई) × ऊंचाई
(c) लंबाई × चौड़ाई + मोटाई (d) 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

उत्तर-(a)

उत्तर : घनाभ के आयतन का सूत्र - लंबाई × चौड़ाई × ऊंचाई

प्रश्न 9. इकाई आयोजना शिक्षकों के लिए उपयोगी है-

- (a) विविध संकल्पनाओं के शिक्षण का व्यवस्थित एवं संतुलित तरीका है।
(b) शिक्षार्थियों की प्रगति का मूल्यांकन करता है।
(c) समय और संसाधनों का उचित प्रबंधन करता है।
(d) उपर्युक्त सभी प्रकार से

उत्तर-(d)

उत्तर : इकाई आयोजन शिक्षण का व्यवस्थित एवं संतुलित तरीका है, इसके द्वारा समय और संसाधनों का उचित प्रबंधन किया जाता है और साथ ही शिक्षार्थियों का मूल्यांकन किया जाता है।

प्रश्न 10. पाठ आयोजना की परिसीमाओं में सम्मिलित नहीं है-

- (a) यह शिक्षण को व्यवस्थित परन्तु अनम्य बनाती है।
(b) यदि इसका कठोरता से पालन किया जाए तो शिक्षक के लिए नई सूझों की कोई गुंजाइश नहीं रहती।
(c) इस पर अत्यधिक बल पाठ को नेमी नहीं बनाता है।
(d) यह प्रारंभिक शिक्षकों के लिए अच्छा है। अनुभवी शिक्षक संरक्षित कक्षा व्यवहारों में सामान्यतः कम निष्ठा रखते हैं।

उत्तर-(c)

उत्तर : पाठ आयोजना पर अत्यधिक बल पाठ को नेमी नहीं बनाता है पाठ आयोजन में सम्मिलित नहीं जबकि अन्य बातें पाठ आयोजन में शामिल है।

गणित शिक्षण की विधियां

इस खण्ड की पूर्ववर्ती इकाइयों में गणित शिक्षण के 'क्यों' और 'क्या' का विवेचन किया गया था। ये प्रश्न मूल रूप से पाठ्यचर्या आयोजन से संबंधित हैं। कक्षा शिक्षक का भले ही इन प्रश्नों से सीधा सरोकार न हो किन्तु शिक्षण की योजना बनाते समय वह निश्चित रूप से इनसे दिशा-निर्देश प्राप्त कर सकता है। विभिन्न शिक्षाशास्त्रियों द्वारा गणित शिक्षण की विभिन्न विधियां प्रतिपादित की गई हैं। इन शिक्षण-विधियों का ज्ञान शिक्षण-अधिगम युक्ति विकसित करने में सहायक हो सकता है। शिक्षक को किसी उपागम विशेष को अपनाते समय बच्चों की प्रकृति, उनकी रुचियों और परिपक्वता तथा उपलब्ध संसाधनों को ध्यान में रखना चाहिए। इस इकाई में सूचीबद्ध विविध विधियों के गुण-दोषों के अध्ययन से शिक्षक अपने शिक्षण कौशल में सुधार ला सकता है। इस इकाई में निम्नलिखित विधियों पर चर्चा की गई है-

1. व्याख्यान विधि
2. खेल विधि
3. आगमन-निगमन विधि
4. ह्युरिस्टिक विधि

● उद्देश्य :

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात आप-

- ◆ गणित शिक्षण की विभिन्न विधियों का अभिनिर्धारण कर सकेंगे।
- ◆ प्राथमिक स्तर के बच्चों के परिपक्वता-स्तर और रुचि को ध्यान में रखते हुए उपयुक्त शिक्षण अधिगम युक्ति का चयन कर सकेंगे, और
- ◆ बच्चों के लिए गणित अधिगम को अधिक रोचक और अर्थपूर्ण बनाने के लिए क्रिया और खेल विधियों के अधिकाधिक उपयोग को प्रोत्साहित कर सकेंगे।

● गणित शिक्षण की विधियां

व्याख्यान विधि-व्याख्यान विधि में शिक्षक पूरे पाठ के दौरान स्वयं बोलता है और शिक्षार्थी ध्यानपूर्वक और चुपचाप सुनते हैं। हो सकता है कि शिक्षक श्यामपट्ट या अन्य किसी शिक्षण सहायता साधन का बिल्कुल प्रयोग न करें। वह शिक्षार्थियों को व्याख्यान के दौरान चर्चित बिंदुओं में से किसी भी बिंदु के संबंध में अपनी शंकाओं को उठाने या किसी प्रश्न का स्पष्टीकरण मांगने का अवसर नहीं देता। शिक्षार्थी प्रमुख विचारों को लिख लेते हैं और बाद में उसे रट लेते हैं।

व्याख्यान विधि नए प्रकरणों का परिचय देने में उपयोगी है। गणित का विषय तथ्यों के पूर्वज्ञान पर आधारित होता है। अतः यह विधि तथ्यों के कुछ पूर्वज्ञान की अपेक्षा रखने वाले प्रकरण के शिक्षण में प्रयोग की जा सकती है। साथ ही इससे कम समय में काफी संख्या में तथ्य प्रस्तुत किए जा सकते हैं।

उदाहरण-कक्षा एक से पांच तक या प्राथमिक स्तर पर दिए गए मूलधन पर निश्चित समय के लिए ब्याज की निश्चित दर के अनुसार साधारण ब्याज का परिकलन करने के लिए शिक्षार्थियों को साधारण ब्याज के परिकलन का सूत्र दिया जाना चाहिए। इस प्रकरण की प्रभावी प्रस्तुति के लिए व्याख्यान विधि द्वारा सबसे पहले साधारण ब्याज का सूत्र इस प्रकार दिया जाता है।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

इसके पश्चात शिक्षार्थियों या विद्यार्थियों से प्रयुक्त शब्दावली की पहचान कराई जाती है। शिक्षक को चाहिए कि सूत्र का विभिन्न स्थितियों में प्रयोग करने में वह विद्यार्थियों का मार्गदर्शन करे। इससे शिक्षार्थियों को सूत्र को भली-भांति याद रखने में सहायता मिलेगी।

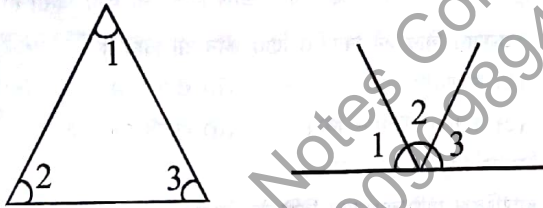
खेल विधि—खेल बच्चों की नैसर्गिक प्रवृत्ति है। शिक्षण के लिए इसका प्रभावी उपयोग किया जाता रहा है। खेलते समय विद्यार्थी अपनी निजी आवश्यकताओं को पहचानते हैं, वे क्रियाकलापों की आयोजना में सहायता करते हैं, मार्गदर्शन स्वीकार करते हैं और अपने निजी लक्ष्य निर्धारित करते हैं। वे अपने आपसी सहयोग और सहभागिता के माध्यम से अधिकतम सीखते हैं। खेल के दौरान अधिगम वास्तविक और रोचक होता है तथा व्यक्तिगत आवश्यकताओं के साथ सहज समायोजित होता है। अधिगम प्रक्रिया रोचक हो जाती है और बच्चों के लिए वातावरण अधिक मुक्त, अनौपचारिक और परिचित होता है। खेल विधि वांछित अभिवृत्तियों और कौशलों के विकास में सहायक होती है। इससे शिक्षार्थियों में आत्मविश्वास का संचार होता है।

आगमन-निगमन विधि—गणित अपनी प्रगति में प्रयोगात्मक और आगमनात्मक है। आगमन तार्किकता का वह रूप है जिसमें विशेष पदार्थों या विशिष्ट प्रक्रियाओं के अध्ययन से एक सामान्य नियम निकाला जाता है। बच्चा मापन, कौशलतात्मक या रचनात्मक क्रियाकलाप, प्रतिरूपों आदि का प्रयोग ऐसे संबंध का पता लगाने के लिए कर सकता है, जिसे बाद में वह स्वयं किसी सिद्धान्त या नियम को प्रतीकात्मक रूप में निरूपित कर सके। बच्चे द्वारा निरूपित सिद्धान्त, नियम या परिभाषा, विशिष्ट या वैयक्तिक दृष्टांतों का कुल जोड़ होगा। सभी आगमनों से उद्भूत सामान्यीकरण को अस्थायी निष्कर्ष माना जाता है।

उदाहरण 1. विद्यार्थियों से कुछ त्रिभुज बनाने के लिए कहें। उनसे कहें कि वे प्रत्येक त्रिभुज के कोण मापें और उनका जोड़ ज्ञात करें।

निष्कर्ष—त्रिभुज के तीनों कोणों का जोड़ 2 समकोण अर्थात् $2 \times 90^\circ$ के बराबर होता है।

आप बच्चों से तीनों कोणों को काटने और उन्हें ऐसे बिंदु पर रखने के लिए कहें जिनसे वे रेखाकार बन जाएं।



उदाहरण 2.

$$3 + 5 = 8$$

$$5 + 7 = 12$$

$$9 + 11 = 20$$

निष्कर्ष—दो विषम संख्याओं का जोड़ एक सम संख्या होती है। निगमन में नियम को स्वीकार किया जाता है और फिर उसे कुछ विशेष उदाहरणों पर लागू किया जाता है। बच्चा नियम नहीं खोजता पर उस नियम को लागू करने का कौशल विकसित करता है। ऐसे में वह सामान्य से विशेष या अमूर्त से मूर्त की ओर बढ़ता है। वास्तविक व्यवहार में आगमन और निगमन के सम्मिश्रण का प्रयोग किया जाता है।

● आगमन विधि

1. विशेष से सामान्य की ओर, मूर्त से अमूर्त की ओर अग्रसर होती है।
2. यह बच्चों की आवश्यकताओं और रुचियों का ध्यान रखती है। यह एक विकासात्मक प्रक्रिया है।
3. बच्चा सामान्यीकरण या नियम को निरूपित करता है। अतः वह उसे

आसानी से याद रख पाता है।

4. यह 'खोज' को प्रोत्साहित करती है और चिन्तन को उद्दीप्त करती है।
5. तार्किकता द्वारा प्रक्रिया का कैसे और क्यों स्पष्ट हो जाता है।

● निगमन विधि

1. सामान्य से विशेष की ओर अमूर्त से मूर्त की ओर अग्रसर होती है।
2. बच्चे पर तथ्य थोपे जाते हैं। संवृद्धि के सिद्धान्त को ध्यान में नहीं रखा जाता है।
3. बच्चों को नियम दिया जाता है। वह उसकी प्रकृति को समझ नहीं पाता इसलिए आसानी से भूल सकता है।
4. प्राधिकारी व्यक्ति द्वारा सूत्र को प्रस्तुत किया जाता है और उसके कंठस्थीकरण को प्रोत्साहित किया जाता है।
5. प्रक्रिया को बिना किसी तर्क के ज्यों का त्यों स्वीकार कर लिया जाता है।

● ह्यूरिस्टिक विधि

ह्यूरिस्टिक विधि को 'खोज विधि' भी कहा जा सकता है। यह व्याख्या विधि से विपरीत है। शिक्षक द्वारा सब कुछ बताए जाने की अपेक्षा विद्यार्थी अपने आप सब कुछ पता लगाता है। यह विद्यार्थी से स्वक्रिया तथा स्व-अधिगम की मांग करती है। इस विधि से विद्यार्थी स्वयं तर्क सीखता है। इसमें विद्यार्थी द्वारा अध्यापक से किसी प्रकार का मार्गदर्शन, सहायता और प्रोत्साहन की अपेक्षा नहीं की जाती। इस विधि से विद्यार्थी में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित होता है। यह विधि शिक्षार्थी को सदा के लिए सफल बनाने के लिए उसमें आत्मविश्वास, मौलिकता, निर्णय की स्वतंत्रता और चिन्तन शक्ति विकसित करती है।

व्यावहारिक तौर पर देखा जाए, तो यह विधि अपने चरम रूप में उपयुक्त और वांछनीय नहीं है। बच्चा आखिरकार बच्चा ही होता है। अधिकतर बातें उसके लिए नई होती हैं। वह अनेक क्रियाओं से अनभिज्ञ होता है और कुछ स्थितियों में उसे प्रत्येक कदम पर शिक्षक की सहायता की आवश्यकता हो सकती है।

● अनुदेशन आयोजन के आधारभूत सिद्धान्त

उपरोक्त विवेचित सभी विधियों में से प्रत्येक का शिक्षण में अपना एक विशिष्ट स्थान है। परन्तु इनमें से कोई भी सदा उपयुक्त नहीं होती। अतः व्यवहार में, इनमें से प्रत्येक के कुछ तत्वों के संयोजन से बनी संकलन विधि अपनाई जाती है। युक्तियुक्त अनुदेशन रणनीति की निर्माण प्रक्रियाओं से संबद्ध कुछ मान्य समान बिन्दु इस प्रकार हैं—

- ◆ किसी भी विषय को प्रस्तुत करने से पहले यह सुनिश्चित कर लें कि शिक्षार्थी नए कार्य के लिए तैयार है।
- ◆ जब तक संबंधित संकल्पनाएं और सिद्धान्तों को समझ नहीं लिया जाता, तब तक प्रक्रियाओं की प्रस्तुति और विकास के लिए मूर्त सामग्री का प्रयोग करें। प्राथमिक कक्षाओं में मूर्त सामग्री के साथ किए जा रहे कार्य को एक ऐसे परिपक्व चिन्तन स्तर तक ले जाना चाहिए कि प्रक्रियाओं के अर्थ आसानी से समझे जा सकें। अभ्यास मात्र से अधिगम सार्थक नहीं होता।
- ◆ विषय-वस्तु, विधियों और सामग्री को विद्यार्थियों की आवश्यकताओं, रुचियों और विकास या (संवृद्धि) स्तरों के अनुरूप बनाएं।
- ◆ शिक्षार्थी जब तक समाविष्ट प्रक्रियाओं का अर्थ पूरी तरह समझ नहीं लेते तब तक कौशल विकास के लिए पुनरावृत्ति अभ्यास को स्थगित कर दें।
- ◆ पाठ्यपुस्तकों में दी गई विषय-वस्तु को अनुपूरित करने के लिए दृश्य साधनों और सामुदायिक संसाधनों का प्रयोग करें।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. वह विधि जिसमें शिक्षक पूरे पाठ के दौरान स्वयं बोलता है और शिक्षार्थी ध्यानपूर्वक और चुपचाप सुनते हैं-

- (a) व्याख्यान विधि (b) खेल विधि
(c) आगमन-निगमन विधि (d) ह्यूरिस्टिक विधि

उत्तर-(a)

उत्तर : व्याख्यान विधि में शिक्षक पूरे पाठ के दौरान स्वयं बोलता है और शिक्षार्थी ध्यानपूर्वक और चुपचाप सुनते हैं।

प्रश्न 2. कौन सी विधि नए प्रकरणों का परिचय देने में उपयोगी है?

- (a) व्याख्यान विधि (b) खेल विधि
(c) आगमन-निगमन विधि (d) ह्यूरिस्टिक विधि

उत्तर-(a)

उत्तर : व्याख्यान विधि नए प्रकरणों का परिचय देने में उपयोगी है।

प्रश्न 3. कौन सी विधि शिक्षार्थियों की रुचियों और उनकी सहभागिता की उपेक्षा करती है?

- (a) व्याख्यान विधि (b) खेल विधि
(c) आगमन-निगमन विधि (d) ह्यूरिस्टिक विधि

उत्तर-(a)

उत्तर : व्याख्यान विधि शिक्षार्थियों की रुचियों और उनकी सहभागिता की उपेक्षा करती है।

प्रश्न 4. कौन सी विधि शिक्षार्थियों में परस्पर सहयोग और सहभागिता को प्रोत्साहित करती है। अधिगम प्रक्रिया को अधिक रोचक बनाती है और शिक्षार्थी में आत्मविश्वास उत्पन्न करती है?

- (a) व्याख्यान विधि (b) खेल विधि
(c) आगमन-निगमन विधि (d) ह्यूरिस्टिक विधि

उत्तर-(b)

उत्तर : खेल विधि शिक्षार्थियों में परस्पर सहयोग और सहभागिता को प्रोत्साहित करती है। अधिगम प्रक्रिया को अधिक रोचक बनाती है और शिक्षार्थी में आत्मविश्वास उत्पन्न करती है।

प्रश्न 5. सही विकल्प का चयन करें-

$$(a) \text{ साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$(b) \text{ साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times 100}{\text{दर}}$$

$$(c) \text{ साधारण ब्याज} = \frac{\text{मिश्रधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{\text{मूलधन}}$$

$$(d) \text{ साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times 100 \times \text{समय}}{\text{मिश्रधन}}$$

उत्तर-(a)

उत्तर : सही विकल्प है- साधारण ब्याज = $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

प्रश्न 6. निम्न में कौन सा कथन असत्य है-

- (a) आगमन विधि विशेष से सामान्य की ओर, मूर्त से अमूर्त की ओर अग्रसर होती है।
(b) निगमन विधि सामान्य से विशेष की ओर, अमूर्त से मूर्त की ओर अग्रसर होती है।
(c) आगमन विधि 'खोज' को नष्ट करती है और चिंतन को उद्दीप्त करती है।
(d) निगमन विधि में प्राधिकारी व्यक्ति द्वारा सूत्र को निश्चित या प्रस्तुत किया जाता है और उसके कंठस्थीकरण को प्रोत्साहित किया जाता है।

उत्तर-(c)

उत्तर : आगमन विधि 'खोज' को नष्ट करती है और चिंतन को उद्दीप्त करती है असत्य कथन है। जबकि आगमन विधि से विषय विशेष से सामान्य की ओर, मूर्त से अमूर्त की ओर अग्रसर होती है।

प्रश्न 7. किस विधि का शिक्षण के लिए प्रभावी उपयोग किया जाता रहा है तथा वह बच्चों की नैसर्गिक प्रवृत्ति है?

- (a) व्याख्यान विधि (b) खेल विधि
(c) आगमन-निगमन विधि (d) ह्यूरिस्टिक विधि

उत्तर-(b)

उत्तर : खेल विधि बच्चों की नैसर्गिक प्रवृत्ति है, इस विधि का शिक्षण के लिए प्रभावी उपयोग किया जाता है।

प्रश्न 8. शिक्षण की किस विधि को 'खोज विधि' कहा जाता है?

- (a) व्याख्यान विधि (b) खेल विधि
(c) आगमन-निगमन विधि (d) ह्यूरिस्टिक विधि

उत्तर-(d)

उत्तर : ह्यूरिस्टिक विधि की शिक्षण को 'खोज विधि' भी कहा जाता है।

प्रश्न 9. व्याख्यान विधि की विपरीत विधि कौन सी विधि है?

- (a) व्याख्यान विधि (b) खेल विधि
(c) आगमन-निगमन विधि (d) ह्यूरिस्टिक विधि

उत्तर-(d)

उत्तर : ह्यूरिस्टिक विधि/व्याख्यान विधि के विपरीत है।

प्रश्न 10. शिक्षण की किस विधि को एकमार्गीय प्रक्रिया कहा जाता है?

- (a) व्याख्यान विधि (b) खेल विधि
(c) आगमन-निगमन विधि (d) ह्यूरिस्टिक विधि

उत्तर-(a)

उत्तर : व्याख्यान विधि को एकमार्गीय प्रक्रिया कहा जाता है क्योंकि इस विधि में शिक्षा के एक ही ध्रुव शिक्षक की ही प्रधानता होती है।

गणित शिक्षण में मूल्यांकन

● प्रस्तावना

मूल्यांकन किसी भी क्रियाकलाप की शक्तियों या उसकी दुर्बलताओं के पहचान करने की प्रक्रिया है। शैक्षिक मूल्यांकन विद्यार्थियों की शक्तियाँ अथवा दुर्बलताओं को सुनिश्चित करने में सहायता करता है। मूल्यांकन यह जानने में हमारी मदद करता है कि उद्देश्य या पूर्व निर्धारित दक्षताएं किस सीमा तक प्राप्त की गई हैं और अधिगम अनुभव किस सीमा तक प्रभावशाली रहे हैं।

इसलिए शैक्षिक मूल्यांकन को शिक्षण अधिगम प्रक्रिया का अभिन्न अंग माना जाता है।

● उद्देश्य

- ♦ दक्षता का अर्थ तथा मूल्यांकन की प्रकृति को समझ सकेंगे।
- ♦ दक्षता आधारित परीक्षण प्रश्न बना सकेंगे, और
- ♦ गणित के दक्षता आधारित प्रश्न मूल्यांकन का उपयोग कर सकेंगे।
- ♦ दक्षता आधारित मूल्यांकन की संकल्पना की व्याख्या कर सकेंगे।

● दक्षता का अर्थ

वेबस्टर की "थर्ड न्यू इण्टरनेशनल डिक्शनरी" के अनुसार दक्षता शब्द का अर्थ है प्रकार्यात्मक रूप से पर्याप्त होने या गुण या अवस्था अथवा पर्याप्त निर्णय क्षमता, कौशल या शक्ति अर्थात् योग्यता या सामर्थ्य क्षेत्र का होना।

● शिक्षा में मूल्यांकन की प्रकृति

क्रियाकलापों के विभिन्न क्षेत्रों में विद्यार्थियों की उपलब्धि के विषय में निर्णय देने की प्रक्रिया को शैक्षिक मूल्यांकन कहा जाता है। शैक्षिक मूल्यांकन दो प्रश्नों के उत्तर देता है – कितना और किस मूल्य का। इसलिए वह आवश्यक परिमाणन के साथ-साथ गुणात्मक माप भी प्रस्तुत करता है। प्राथमिक स्तर पर किया गया शैक्षणिक मूल्यांकन दो प्रकार का होता है।

(क) विकासात्मक

(ख) संकलनात्मक

● विकासात्मक मूल्यांकन

जैसे-जैसे विद्यार्थी आगे बढ़ता है, वैसे-वैसे शिक्षण अधिगम प्रक्रिया के साथ-साथ विकासात्मक मूल्यांकन चलता है। यह समय-समय पर विद्यार्थी की प्रगति का मूल्यांकन उपलब्ध कराता है। सामान्यतया बच्चे द्वारा अनुभूत अधिगम कठिनाइयों के निदान के लिए तथा उपचारात्मक शिक्षण की व्यवस्था करने के लिए इस जानकारी का उपयोग किया जाता है।

● संकलनात्मक मूल्यांकन

संकलनात्मक मूल्यांकन सत्र के अंत में होता है। अध्यापक द्वारा पढ़ाने के बाद यह देखना कि विद्यार्थी ने ज्ञान किस हद तक ग्रहण किया है। जैसे-किसी अध्याय को पढ़ाने के बाद जब अध्यापक विद्यार्थी से प्रश्न करता है, तो वह संकलनात्मक मूल्यांकन कहलाता है।

● दक्षता आधारित मूल्यांकन की मुख्य विशेषताएं

- दक्षता आधारित मूल्यांकन की मुख्य विशेषताएं नीचे प्रस्तुत की जा रही हैं –
- (i) इससे यह निर्धारित करने में सहायता मिलती है कि किसी बच्चे ने विशिष्ट दक्षताओं में से कौन सी दक्षताएं प्राप्त कर ली हैं।
- (ii) इससे उन संयोग त्रुटियों को दूर किया जा सकता है जो परिणामों को प्रभावित कर सकती हैं।
- (iii) इसके आधार पर शिक्षण अधिगम के लिए उपर्युक्त युक्तियां सोची जा सकती हैं।
- (iv) यह उन दक्षताओं की सूची बनाने में सहायता करता है जिन्हें शिक्षार्थियों ने प्राप्त कर लिया है या प्राप्त नहीं किया है।
- (v) इससे उल्लिखित दक्षताओं के प्रसंग में बच्चों को पूर्ण दक्ष या अदक्ष के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है।
- (vi) इससे पर्याप्त संख्या में परीक्षण प्रश्नों द्वारा दक्षता के सभी पक्षों का मूल्यांकन कर सकते हैं।

● दक्षता आधारित प्रश्न : कुछ विचारणीय बिंदु

दक्षता आधारित प्रश्नों को तैयार करते समय हम कुछ विचारणीय प्रश्नों पर विचार कर सकते हैं—

- (A) दक्षता का विशिष्ट विवरण बड़े स्पष्ट और सुनिश्चित रूप में दिया जाना चाहिए।
- (B) प्रत्येक दक्षता के लिए चार या पांच प्रश्न तैयार किए जाने चाहिए।
- (C) दक्षता आधारित परीक्षण प्रश्न तीन प्रकार के हो सकते हैं—
(i) मौखिक,
(ii) क्रिया आधारित,
(iii) लिखित
- (D) सभी दक्षताओं पर आधारित परीक्षण प्रश्न तैयार करने चाहिए।
- (E) परीक्षण प्रश्नों की भाषा बड़ी स्पष्ट तथा सरल होनी चाहिए।

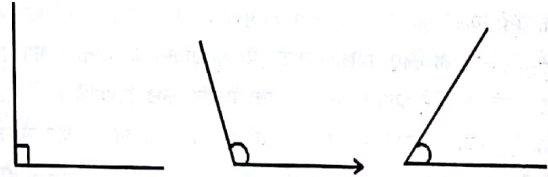
● दक्षता आधारित मूल्यांकन के लिए प्रश्न निर्माण

उदाहरण—शिक्षार्थी परिवेश के विभिन्न पदार्थों से भिन्न प्रकार के कोणों को पहचानता है।

मूल्यांकन का प्रकार—क्रिया आधारित

अपेक्षित सामग्री—गत्ते के टुकड़े जिन पर भिन्न-भिन्न प्रकार के कोण खींचे गए हों, घड़ी/अलार्म घड़ी (आकृतियां), भिन्न-भिन्न कोण बनाती हुई माचिस की तीलियां।

परीक्षण प्रश्न—निम्नलिखित को समकोण, न्यूनकोण तथा अधिककोण में वर्गीकृत करें। आकृतियों से संबंध वर्णों को उपर्युक्त शीर्षक के नीचे लिखें।



उदाहरण : निम्नलिखित दशमलवों को आरोही क्रम में लिखें।

- (i) 0.01, 1.01, .001, 0.0001, 1.001
- (ii) 0.9, 1.0, 0.09, 0.99, 0.909
- (iii) 11, .01, .001, 1.1, .011
- (iv) 0.7, 0.69, 0.71, 7.7, 7.0

उत्तर—संख्याओं के आरोही क्रम में

- (i) 0.0001, .001, 0.01, 1.001, 1.01
- (ii) .09, 0.90, 0.909, 0.99, 1.0
- (iii) .001, .01, .011, 1.1, 11
- (iv) 0.69, 0.7, 0.71, 7.0, 7.7

प्रश्न : निम्नलिखित दशमलवों में रेखांकित अंकों का स्थानीय मान लिखें—

- (i) 4.004 (ii) .3545 (iii) 0.0097

उत्तर : रेखांकित अंकों का स्थानीय मान—

- (i) 4.004
4/1000
- (ii) .3545
5/100
5/10000
- (iii) .0097
7/10000
0/10

□ प्राइमरी गणित : शिक्षण अधिगम

प्रस्तावना—शिक्षण अधिगम प्रक्रिया के दौरान आपको उन क्षेत्रों का निर्धारण करने और पहचानने की आवश्यकता होती है जिनमें विद्यार्थी गलतियाँ करते हैं। यह शिक्षण प्रक्रिया का एक संवेदनशील चरण है जहाँ आपको निदान करना होता है तथा शिक्षार्थियों में अधिगम की वांछित गुणात्मकता को सुनिश्चित करने के लिए उपचारात्मक शिक्षण की दृष्टि से शिक्षण सामग्री तैयार करनी होती है।

शिक्षा के प्रसंग में निदानात्मक परीक्षण प्रक्रिया एक उपाय है और उपचारात्मक शिक्षण एक नमूना है। इसलिए प्रभावपूर्ण अधिगम को सुनिश्चित करने के लिए तथा शिक्षा की गुणात्मकता को सुधारने के लिए निदानात्मक परीक्षण और उपचारात्मक शिक्षण अत्यंत अनिवार्य है।

● उद्देश्य

निदानात्मक परीक्षण की प्रकृति और प्रयोजन को समझ सकेंगे।

- ◆ निदानात्मक परीक्षण के अर्थ और महत्व को समझ सकेंगे।
- ◆ कक्षा स्थितियों में गणित में उपचारात्मक शिक्षण का आयोजन कर सकेंगे।
- ◆ कक्षा में शिक्षा अधिगम प्रक्रिया में निदानात्मक परीक्षण के सोपानों और चरणों को अपना सकेंगे।

● निदानात्मक परीक्षण

सामान्यतः किसी इकाई या प्रकरण को पूरा करने के बाद आप शिक्षार्थियों की निष्पत्ति की जांच के लिए परीक्षण करते हैं। मूल्यांकन के पश्चात आप कुछ निष्कर्ष निकालते हैं और आपको पता लगता है कि कुछ विद्यार्थियों ने बहुत अच्छा किया है, जबकि विद्यार्थियों के एक विशेष वर्ग ने आपकी अपेक्षा से कम संप्राप्ति की है। अब हमें इस निष्पत्ति या मंद अधिगम के कारणों को ढूँढना होता है। अवश्य ही इस निम्न निष्पत्ति के कुछ कारण होंगे। अधिगम कठिनाइयों के क्षेत्रों का पता लगाना तथा उन्हें पहचानना ही निदानात्मक परीक्षण की ओर ले जाता है।

निदानात्मक परीक्षण में निम्नलिखित बिंदुओं को अवश्य ध्यान में रखना चाहिए—

- (i) वे कौन से शिक्षार्थी हैं जिन्हें सहायता की आवश्यकता है?
- (ii) त्रुटि क्यों हुई?
- (iii) त्रुटियाँ किस/किन क्षेत्र/क्षेत्रों में होती हैं?

● निदानात्मक परीक्षण के सोपान एवं चरण

शैक्षिक निदान में अनिवार्य सोपान है—

- (i) उन विद्यार्थियों को पहचानना जिन्हें सहायता की आवश्यकता है,
- (ii) त्रुटियों या अधिगम कठिनाइयों को खोजना
- (iii) धीमी गति से सीखने के कारणों की खोज करना

● उपचारात्मक शिक्षण

जहाँ निदान विद्यार्थियों की कठिनाइयों तथा उनके चरणों को खोजने की प्रक्रिया है, वहीं तत्संबंधी अनुवर्ती कार्यों से विद्यार्थियों को अपनी कमियों को दूर करने में सहायता मिलती है। इस सोपान को सामान्यतः उपचारात्मक शिक्षण कहा जाता है। इसके लिए आपको ऐसी सामग्री तैयार करने या प्रबंध करने में कुशल होना चाहिए जिसका उपयोग सुधारात्मक अनुदेशन में किया जा सके और जिससे शिक्षण की गुणात्मकता बढ़ाई जा सके।

उपचारात्मक शिक्षण अपनाने के लिए निम्नलिखित पर ध्यान दें—

- (i) सामग्री विद्यार्थियों की प्रगति के क्रमबद्ध अभिलेखन को प्रोत्साहित करती हो।
- (ii) सुधारात्मक सामग्री विद्यार्थियों को प्रगति करने का अवसर देने वाली हो।
- (iii) सुधारात्मक सामग्री की रचना विद्यार्थियों की वैयक्तिक कठिनाइयों को दूर करने के लिए की जानी चाहिए।
- (iv) सुधारात्मक सामग्री क्रमिक और आत्म निदेशात्मक तथा विद्यार्थियों को स्वतंत्र करने का अवसर देने वाली होनी चाहिए। सामग्री में दिए जाने वाले निर्देश सफलतापूर्वक या आसानी से पठनीय तथा बोधगम्य हों।

उदाहरण : उपचारात्मक शिक्षण की सामग्री तैयार करने के लिए आपको ऐसी सामग्री तैयार करनी है जिससे विद्यार्थी को दी हुई भिन्नों में हरों को समान करने के अभ्यासों का पर्याप्त अवसर प्राप्त हो।

$$(i) 3 + \frac{5}{7} = \frac{3}{1} + \frac{5}{7} = \frac{3 \times 7}{1 \times 7} + \frac{5}{7} = \frac{21}{7} + \frac{5}{7} = \frac{26}{7}$$

$$(ii) 4 + \frac{6}{7} = \frac{4}{1} + \frac{6}{7} = \frac{4 \times 7}{1 \times 7} + \frac{6}{7} = \frac{28}{7} + \frac{6}{7} = \frac{34}{7}$$

विद्यार्थियों को इसी प्रकार के प्रश्नों पर तब तक पर्याप्त अभ्यास करवाना चाहिए जब तक वे पूर्णदक्षता प्राप्त नहीं कर लेते। शैक्षणिक सामग्री को चुनते तथा प्रयोग करते समय क्षेत्र विशेष में विद्यार्थी की वैयक्तिक आवश्यकता सबसे महत्वपूर्ण बात है। आपको व्यक्तिगत स्तर पर व्यवहार करना चाहिए।

● तीव्र गति से सीखने वालों के लिए गणितीय कार्यक्रम

सामान्य रूप से दिन-प्रतिदिन का शिक्षण औसत शिक्षार्थियों पर केन्द्रित होता है। दूसरों पर सम्यक ध्यान नहीं दिया जाता। आपको अपने कुछ ऐसे विद्यार्थियों की याद होगी जो अध्ययन में बहुत कमजोर रहे थे। साथ ही आपकी कक्षाओं में कुछ ऐसे विद्यार्थी भी रहे थे जो बहुत जल्दी ग्रहण कर लेते थे, बहुत कंठस्थ कर लेते थे, बहुत उत्साह दिखाते थे और अंततः परीक्षा में बहुत अच्छे अंक प्राप्त करते थे। प्रायः ऐसे विद्यार्थियों को तीव्रगति से सीखने वाला कहा जाता है। ऐसे विद्यार्थियों का व्यवहार विशिष्ट प्रकार का होता है और जहाँ तक गणित शिक्षण-अधिगम का संबंध है उनकी आवश्यकताएं सर्वथा भिन्न होती हैं।

● उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात

- (i) तीव्र गति से सीखने वालों को पहचान सकेंगे,
- (ii) तीव्र गति से सीखने वालों के लिए विशिष्ट कार्यक्रम की आवश्यकता का महत्व समझ सकेंगे।
- (iii) तीव्र गति से सीखने वाले विद्यार्थियों की प्रकृति तथा उनकी आवश्यकताओं को समझ सकेंगे।

(iv) उन्हें अपनी अधिगम सामग्री तैयार करने के लिए प्रोत्साहित कर सकेंगे।

● तीव्र गति से सीखने वालों के अभिलक्षण

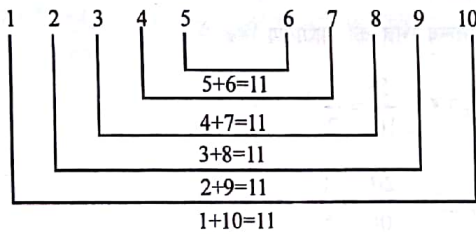
- (i) गणित में बहुत उच्च अंक प्राप्त करते हैं।
- (ii) दूसरों की अपेक्षा 1/3 समय में विषय वस्तु सीख लेते हैं।
- (iii) प्रश्नों के उत्तर शीघ्र तथा शुद्ध रूप में देते हैं।
- (iv) न्यूनतम संभव समय में पूर्णदक्षता प्राप्त कर लेते हैं।
- (v) बेहतर स्मृति तथा बोध क्षमता प्रदर्शित करते हैं।
- (vi) एक ही बात वैकल्पिक तरीकों से करने के बारे में पूछते हैं तथा उनकी सराहना करते हैं।

● तीव्र गति से सीखने वाले विद्यार्थी गणितीय संकल्पनाओं को जल्दी समझने में समर्थ होते हैं। उनकी विषय ग्रहण करने की शक्ति तथा अभिकलन क्षमता उन्हें सामान्य विद्यार्थियों से अलग करती है। कभी-कभी जिज्ञासा तथा सृजनात्मकता से भरे उनके प्रश्न शिक्षकों को अप्रिय लगते हैं। परंतु शिक्षकों का यह कर्तव्य है कि विषय के बारे में अधिक से अधिक जानने की उनकी उत्कृष्ट इच्छा को संतुष्ट करें। ऐसे विद्यार्थियों के लिए पृथक पाठ्यक्रम की मांग करना उचित नहीं है। फिर भी शिक्षकों द्वारा निम्नलिखित उपागम अपनाए जा सकते हैं—

- (A) उन्हें अपनी आयु तथा कक्षा स्तर के अनुसार कठिन समस्याओं का हल करने के लिए कहा जाए
- (B) वे अपने सहपाठियों की सहायता करें
- (C) उन्हें गणित शिक्षण के उच्च उद्देश्यों को विकसित करने के अवसर उपलब्ध कराए जाएं।

● समुन्नयन कार्यक्रम :

उदाहरण : 1 से 10 तक की संख्याओं का जोड़



यहां हमारे पास हैं,

$$11 \text{ के } 5 \text{ समूह अतः योग} = 5 \times 11 = 55$$

$$11 \text{ से } 20 \text{ तक की संख्याओं का योग} = 5 \times 31 = 155$$

$$21 \text{ से } 30 \text{ तक की संख्याओं का योग} = 5 \times 51 = 255$$

$$31 \text{ से } 40 \text{ तक की संख्याओं का योग} = 5 \times 71 = 355$$

● भिन्न

प्रश्न : $3/5$ और $6/8$ के बीच की ऐसी भिन्नात्मक संख्याएँ लिखें जिनका हर 40 है।

संकेत : पहले हरों का लघुत्तम निकाल कर उन्हें एक जैसा बनाएं। 5 और 8 का लघुत्तम 40 है।

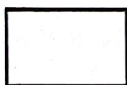
$$\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{30}{40}$$

अतः $3/5$ और $6/8$ के बीच भिन्नात्मक संख्याएँ हैं—

$$\frac{25}{40}, \frac{26}{40}, \frac{27}{40}, \frac{28}{40}, \frac{29}{40}$$

परिमाण



2 सेमी.

3 सेमी.

$$\text{परिमाण} = (3 \text{ सेमी.} + 2 \text{ सेमी.}) \times 2$$

$$= 5 \text{ सेमी.} \times 2 = 10 \text{ सेमी.}$$

Examtrix.com

● दशमलव

उदाहरण : दशमलव संख्या का मान 10 गुना, 100 गुना, 1000 गुना, 10000 गुना करना आदि।

(i) 1.67 का मान 10 गुना करें।

$$\text{उत्तर} - 1.67 \times 10 = 16.7$$

(ii) 1.67 का मान 100 गुना करें।

$$\text{उत्तर} - 1.67 \times 100 = 167$$

(iii) 1.67 का मान 10000 गुना करें।

$$\text{उत्तर} - 1.67 \times 10000 = 16700$$

उदाहरण : दशमलव संख्या के मान का दशांश, शतांश तथा सहस्रांश बनाना।

(i) 15 (15.0) का दशांश लिखिए।

$$\text{उत्तर} - 15 \text{ का दशांश} = \frac{1}{10} \times 15 = 1.5$$

(ii) 115.4 का शतांश लिखिए।

$$\text{उत्तर} - \frac{1}{100} \times 115.4 = 1.154$$

(iii) 7256 का सहस्रांश लिखिए।

$$\text{उत्तर} - 7256 \text{ का सहस्रांश} = \frac{1}{1000} \times 7256 = 7.256$$

● आयतन

उदाहरण : किसी हौज की लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई क्रमशः 60 सेमी., 30 सेमी. और 20 सेमी. है। इसका आयतन ज्ञात करें—

$$\text{आयतन} = \text{लंबाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊंचाई}$$

$$= 60 \times 30 \times 20$$

$$= 36000 \text{ घन सेमी.}$$

प्रश्न : 300 का 8 प्रतिशत ज्ञात करें—

$$\text{उत्तर} : = 300 \times \frac{8}{100} = 24$$

प्रश्न : $4/5$ को प्रतिशत में बदलें।

$$\text{उत्तर} : = \frac{4}{5} \times 100 = \frac{400}{5} = 80\%$$

अभ्यास प्रश्न

प्रश्न 1. निम्न के लिए भिन्ने लिखें—
0.0001, 0.00001

$$\text{उत्तर} : 0.0001 = \frac{1}{10000}$$

$$0.00001 = \frac{1}{100000}$$

प्रश्न 2. निम्नलिखित को प्रतिशत में बदलें—

$$1/5, \frac{1}{25}, 1/50, 1/20$$

उत्तर : $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$

$\frac{1}{25} = \frac{1}{25} \times 100 = 4\%$

$\frac{1}{50} = \frac{1}{50} \times 100 = 2\%$

$\frac{1}{20} = \frac{1}{20} \times 100 = 5\%$

प्रश्न 3. निम्नलिखित में प्रत्येक को न्यूनतम भिन्न में बदलें

(i) 5% (ii) $\frac{32}{3}\%$

उत्तर : $5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

$\frac{32}{3} = \frac{32}{3} \times \frac{1}{100} = \frac{32}{300} = \frac{8}{75}$

प्रश्न 4. 41 से 50 तक संख्याओं का योग ज्ञात करें।

उत्तर : 41 से 50 तक की संख्याओं का योग
 $= 41 + 50 = 91 \times 5 = 455$

प्रश्न 5. 551 से 560 तक की संख्याओं का योग ज्ञात करें।

उत्तर : $551 + 560 = 1111 \times 5 = 5555$

प्रश्न 6. $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{7}{8}$ के बीच की संख्याएं हैं—

उत्तर : $\frac{2}{3}$ तथा $\frac{7}{8}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{8}{8}$ तथा $\frac{7}{8} \times \frac{3}{3}$

$= \frac{16}{24}$ तथा $\frac{21}{24}$

अतः दोनों के बीच की भिन्ने हैं—

$\frac{17}{24}, \frac{18}{24}, \frac{19}{24}, \frac{20}{24}$

प्रश्न 7. एक टीम ने 10 खेलों में 80% खेल जीत लिए। उसने कितने खेल हारे?

उत्तर : 10 खेलों में जीते मैच = 80%

$\therefore$ 10 खेलों में हारे गए मैच का प्रतिशत = $(100 - 80)\% = 20\%$

$\therefore$ हारे गए मैचों की संख्या = $\frac{10}{100} \times 20 = 2$

प्रश्न 8. $\frac{15}{21}$ और $\frac{19}{21}$ के बीच की भिन्ने कौन सी हैं?

उत्तर : $\frac{15}{21}$ और $\frac{19}{21}$

दोनों के बीच की भिन्ने = $\frac{16}{21}, \frac{17}{21}, \frac{18}{21}$

प्रश्न 9. 1001 से 1010 तक की संख्याओं का योग ज्ञात करें।
 उत्तर : 1001 से 1010 के बीच संख्याओं का योग = $2011 \times 5 = 10055$

प्रश्न 10. 20 का दशांश, 18 शतांश ज्ञात करें।

उत्तर : 20 का दशांश = $\frac{20}{10} = 2.0$

18 का शतांश = $\frac{18}{100} = 0.18$

प्रश्न 11. 1.82×1000 का मान ज्ञात करें।

उत्तर : $1.82 \times 1000 = 1820.00$

प्रश्न 12. एक कमरे की लंबाई, चौड़ाई एवं ऊंचाई क्रमशः 22 मी., 18 मी., 20 मी. है। कमरे का आयतन ज्ञात करें।

उत्तर : आयतन = $22 \times 18 \times 20$ मी.
 $= 7920$ घन मी.

प्रश्न 13. दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में बदलें

(A) 0.5 (B) .20

उत्तर : दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में

(A) $0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

(B) $.20 = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

प्रश्न 14. निम्न को प्रतिशत में बदलिए।

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{2}{8}$

उत्तर : प्रतिशत में

(a) $\frac{1}{4} \times 100 = 25\%$

(b) $\frac{2}{8} \times 100 = 25\%$

प्रश्न 15. तीव्र या मन्द शब्द से रिक्त स्थानों की पूर्ति करें—

- वह शिक्षार्थी जो पहले प्रयास में ही प्रश्न का सही उत्तर देता है।गति से सीखे वाला शिक्षार्थी होता है।
- परीक्षा में कम अंक पाने वालागति से सीखने वाला शिक्षार्थी होता है।
- समस्या को गहराई से विस्तारपूर्वक सीखने के लिए उत्सुक शिक्षार्थीगति से सीखने वाला शिक्षार्थी होता है।
- वह शिक्षार्थी जो अपनी त्रुटियां ढूँढ लेता हैगति से सीखने वाला शिक्षार्थी होता है।
- शिक्षार्थी जो समस्या के समाधान में बहुत अधिक समय लगाता हैगति से सीखने वाला शिक्षार्थी होता है।

उत्तर — (i) तीव्र (ii) मन्द (iii) तीव्र (iv) तीव्र (v) मन्द

Amitesh Singh 9118908845

मूलभूत गणितीय संकल्पनाओं का शिक्षण

□ संख्यांक, चार आधारभूत संक्रियाएं एवं संख्या पद्धति

● प्रस्तावना

धन पूर्णाकों और गणना का विकास, मानव जाति की सबसे आकर्षक खोजों में से एक है। संख्या की धारणा को 'संग्रह' की धारणा से लिया गया है। उदाहरण के लिए संग्रह (x, x, x) संख्या तीन का निरूपण करता है। चूंकि अधिकतर आरंभिक संग्रह जैसे भेड़ों का झुंड, तीरों का समूह, पेड़ों अथवा झोपड़ियों का समूह प्रकृति अथवा प्राचीन मानव के परिवेश से लिए गए थे, इसलिए इन संख्यापरक धारणाओं को 'धन पूर्णांक' नाम दिया गया था। यही नहीं, चूंकि इन संख्याओं से इस प्रश्न का उत्तर मिल जाता है कि संग्रह में कितनी वस्तुएं हैं इसलिए संख्याओं की 'गिनती करना' वाक्यांश भी इनके लिए प्रयुक्त किया गया था।

वर्तमान संख्या पद्धति प्राचीन भारतीय (हिंदू) पद्धति पर आधारित है जिसमें आधार 10 की धारणा का और उसके प्रतीक '0' का प्रयोग किया था, जिसे शून्य कहा गया और जिसका अर्थ है 'कुछ नहीं'। धन पूर्णाकों के समुच्चय को इस रूप में निरूपित किया जाता है :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,.....

जब हम इस समुच्चय में संख्या के रूप में 0 को शामिल करते हैं तो हमें पूर्णाकों का समुच्चय प्राप्त होता है। इस इकाई में हम पूर्णाकों और संख्यायन पद्धति की महत्वपूर्ण विशेषताओं और गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे।

● उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप अपने विद्यार्थियों को इस योग्य बना सकेंगे कि वे-

- ♦ धन पूर्णाकों और पूर्णाकों की संकल्पना तथा पूर्णाकों के क्रम संबंधी गुणधर्म को समझ सकें,
- ♦ भारत के विभिन्न राज्यों में रोमन पद्धति के संख्याओं में लिखी गई संख्याओं को पहचान सकें।
- ♦ स्थान-मान और प्रसारि अंकन पद्धति की संकल्पना समझ सकें।
- ♦ पूर्णाकों की चार आधारभूत संक्रियाओं में कौशल विकसित कर सकें।
- ♦ संख्याओं के महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य का परिकलन कर सकें।

● स्थान-मान चार्ट :

करोड़		लाख		हजार		इकाइयां		
दस	एक	दस	एक	दस	एक			
करोड़	करोड़	लाख	लाख	हजार	हजार	सैकड़ें	दहाइयां	इकाइयां
100000000	10000000	1000000	100000	10000	1000	100	10	1
					2	3	4	5

स्थान-मान चार्ट के नीचे दिया गया संख्यांक 2345, संख्या दो हजार तीन सौ पैंतालिस को निरूपित करता है। यह चार अंकों वाला एक संख्यांक है।

- ♦ पूर्णाकों को समसंख्याओं, विषम संख्याओं, अभाज्य संख्याओं और भाज्य संख्याओं में वर्गीकृत कर सकें।

- संख्याएं तथा संख्यांक : अंक, स्थान-मान और संख्याओं का क्रमीकरण

क्रिया-कलाप 1 : संख्याओं की धारणा के बारे में बताना

शिक्षार्थियों को संग्रहों को पहचानने का अनुभव कराएं। संग्रहों की तुलना करने की धारणा को तीर आरेख खींचकर सहाजानुभूत रूप में बताया जाना चाहिए। किसी संग्रह के 'बहुत होने' के गुणधर्म को बताने के लिए 'अधिक' 'कम', 'इतने' की शब्दावली का प्रयोग करें।

शिक्षार्थियों को उस गुणधर्म को ज्ञात करने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए जो धन पूर्णांक बनाने में सहायक है। पहला धन पूर्णांक एक है।

प्रत्येक संख्या उससे पहले की संख्या से 'एक अधिक' होती है। अर्थात् दो एक से अधिक है।

पांच चार से एक अधिक है।

क्रिया-कलाप 2 : संख्यांक की धारणा से अवगत कराना

संख्यांक संख्या की धारणा का प्रतीक है। संख्याएं असंख्य हैं और हम उन्हें केवल कुछ ही प्रतीकों द्वारा व्यक्त कराना चाहते हैं। संख्यांक लिखने के लिए इन प्रतीकों के नियम होंगे :

चित्र	संख्या नाम	संख्यांक
□	एक	1
□ □	दो	2
□ □ □	तीन	3
□ □ □ □	चार	4
□ □ □ □ □	पांच	5
□ □ □ □ □ □	छः	6
□ □ □ □ □ □ □	सात	7
□ □ □ □ □ □ □ □	आठ	8
□ □ □ □ □ □ □ □ □	नौ	9

इस अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति में 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 प्रतीकों का प्रयोग किया गया है तथापि व्यवहार में संख्याओं का संख्याओं के रूप में प्रयोग किया जाता है।

का स्थान मान 40 और 5 का स्थान मान 5 इकाइयां अथवा पांच है।

हम 2345 को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \times 1$$

अथवा

योग के नियम का प्रयोग करते हुए $2000 + 300 + 40 + 5$ के रूप में लिख सकते हैं। इसे हम विस्तारित संकेतन भी कहते हैं।

● संख्याओं का क्रमीकरण

'क्रम' का अर्थ उन क्रियाकलापों की सहायता से विकसित होता है जिनमें 'इसके बाद आता है' और 'इससे पहले आता है' शब्दावली का प्रयोग होता है। तत्पश्चात् इसे समुच्चयों में पदार्थों का मिलान करते हुए सहजानुभूत रूप में संख्याओं में विस्तारित कर दिया जाता है।

एक अंक वाली संख्याओं के क्रमीकरण के लिए प्रतीकों के प्रयोग को प्रोत्साहित करें।

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$$

$$9 > 8 > 7 > 6 > 5 > 4 > 3 > 2 > 1$$

यह 'क्रम' का आधारभूत गुणधर्म है और जिसको बाद में दो अंकों, तीन अंकों और इससे बड़ी संख्याओं की तुलना करने के लिए विस्तारित कर दिया जाता है। सामान्यीकरण को विकसित करने के लिए स्थान-मान की धारणा का प्रयोग करें :

(i) 2 अंकों वाली संख्याएं 1 अंक वाली संख्याओं से बड़ी होती हैं।

(ii) 3 अंकों वाली संख्याएं 2 और 1 अंक वाली संख्याओं से बड़ी होती हैं।

सामान्यतः अधिक अंकों वाली संख्या कम अंकों वाली संख्या से बड़ी होती है।

728 इसलिए 597 से बड़ी संख्या है क्योंकि 728 में सैकड़ के स्थान में 7, संख्या 597 में सैकड़ के स्थान में 5 से बड़ा है।

इसी प्रकार 999 इसलिए 699 से बड़ी संख्या है क्योंकि सैकड़ के स्थान में 9, 6 से बड़ा है।

उदाहरण : निम्नलिखित संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए:

12, 728, 425, 98, 4321, 8

हल :

(i) 8 सबसे छोटी संख्या है और केवल यही 1 अंक वाली संख्या है।

(ii) 12 और 98 दो अंकों वाली संख्याएं हैं जिनमें 98, 12 से बड़ी है क्योंकि सबसे बाईं ओर वाले स्थान में 9, 1 से बड़ा है।

(iii) 425 और 728 में (जो कि 3 अंक वाली संख्याएं हैं), 425 से 728 संख्या इसलिए बड़ी है कि सबसे बाईं ओर वाले स्थान में 4 से 7 बड़ा है।

(iv) 4321 अन्य सभी संख्याओं से बड़ी है क्योंकि इसमें अधिकतम संख्या में अंक हैं। इसलिए हम लिखते हैं—

$$8 < 12 < 98 < 425 < 728 < 4321$$

● संख्याओं की चार आधारभूत संक्रियाएं

जोड़ना—गणना में अत्यंत स्वाभाविक रूप से संख्या का योग या जोड़ आता है। जोड़ना आगे की ओर गणन करना है। यह एक साथ की धारणा से निकटतः संबंधित है।

1. यदि हम दो संख्याओं (जिन्हें योज्य कहते हैं) को जोड़ें तो हमें उत्तर के रूप में जो संख्या प्राप्त होती है उसे हम योगफल कहते हैं। किन्हीं दो धन पूर्णांकों को जोड़ने पर संख्या में जो उत्तर प्राप्त होता है वह धन पूर्णांकों की श्रेणी में आता है—

2. संख्याओं के किसी जोड़े को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है :

$$3 + 4 = 7 \text{ और } 4 + 3 = 7$$

3. जब तीन या अधिक संख्याओं को जोड़ने की आवश्यकता हो तो हम किन्हीं दो संख्याओं को पहले जोड़ते हैं और फिर उनके योगफल में तीसरी संख्या को जोड़ते हैं। इस गुणधर्म से भी इस बात की पुष्टि होती है कि हम किसी भी जोड़ के योगफल की जांच, विपरीत दिशा में जोड़कर कर सकते हैं।

4. शून्य का गुणधर्म यह है कि किसी भी अन्य संख्या में इसके जोड़ने से उस संख्या की पहचान बनी रहती है।

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ और } 0 + 0 = 0$$

उदाहरण : (i) जोड़ें

$$\begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11111 \\ 1111 \\ \hline 11111111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ +5 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1111 \\ 11111 \\ \hline 11111111 \end{array}$$

(ii) जोड़ें 3 और 0

$$\begin{array}{r} 3 \\ +0 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ +3 \\ \hline 3 \end{array}$$

(iii) जोड़ें 9, 3 और 4

$$\begin{array}{r} 9 \quad 12 \\ +3 \quad 16 \\ +4 \quad 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \quad 16 \\ +3 \quad 7 \\ +4 \quad 7 \end{array}$$

(iv) बड़ी संख्याओं का योग :

$$24 = 2 \text{ दहाइयां और } 4 \text{ इकाइयां} = 2 \times 10 + 4 \times 1$$

$$36 = 3 \text{ दहाइयां और } 6 \text{ इकाइयां} = 3 \times 10 + 6 \times 1$$

$$42 = 4 \text{ दहाइयां और } 2 \text{ इकाइयां} = 4 \times 10 + 2 \times 1$$

$$86 = 8 \text{ दहाइयां और } 6 \text{ इकाइयां} = 8 \times 10 + 6 \times 1$$

$$185 = 17 \text{ दहाइयां और } 15 \text{ इकाइयां} = 17 \times 10 + 15 \times 1$$

या

$$18 \text{ दहाइयां और } 5 \text{ इकाइयां} = 18 \times 10 + 5 \times 1$$

उदाहरण :

6842, 2568, 537 को जोड़िए

हासिल	1	1	1	
हजार		सैकड़ा	दहाई	इकाई
6	8	4	2	
2	5	6	8	
	5	3	7	
9	9	4	7	

संख्याओं को कॉलमों में लिखें :

(i) इकाइयों को जोड़ें $2 + 8 + 7 = 17$ अब 7 को इकाइयों के कॉलम में लिखें और एक को हासिल के रूप में दहाइयों के कॉलम में ले जाएं।

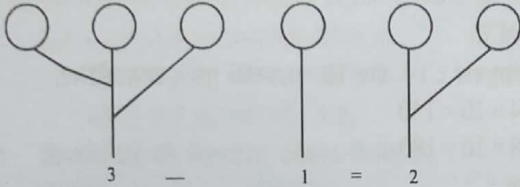
(ii) दहाइयों को जोड़ें

$17 + 4 + 6 + 3 = 14$ अब 4 को दहाइयों के कॉलम में लिखें और एक को हासिल के रूप में सैकड़ों के कॉलम में ले जाएं।

(iii) सैकड़ों को $11 + 8 + 5 + 5 = 19$, अब 9 को सैकड़ों के कॉलम में लिखें और एक को हासिल के रूप में हजार के कॉलम में ले जाएं।

(iv) हजारों को $11 + 6 + 2 = 9$, अब 9 को हजारों के कॉलम में लिखें।

घटाना : घटाने की क्रिया जोड़ने की संक्रिया से उलटी होती है। इसे 'निकाल लेने' अथवा 'विभाजन' संबंधी क्रियाकलापों के द्वारा समझाएं। जीवन संबंधी स्थितियों का निरूपण करने के लिए चित्रों का प्रयोग किया जा सकता है।



निकाल लिया रह जाते हैं

तीन गुब्बारे हैं। एक गुब्बारा निकाल लेने पर हमारे पास दो गुब्बारे रह जाते हैं।

उदाहरण :

(i)	5	(ii)	35	5 इकाइयाँ - 2 इकाइयाँ
	-2		-12	3 दहाइयाँ - 1 दहाई
	<u>3</u>		<u>23</u>	
(iii)	42		3 दहाइयाँ 12 इकाइयाँ	
	-17		-1	-7
	<u>25</u>		<u>2</u>	<u>5</u>

चूंकि हम 2 इकाइयों में से 7 इकाइयों को नहीं निकाल सकते इसलिए हम 42 का पुनर्समूहन करते हैं अर्थात् 3 दहाइयाँ और 12 इकाइयाँ।

उदाहरण : 312 में से 166 घटाएं ?

312	सैं.	द.	इ.	सैं.	द.	इ.
-166	3	0	12	2	10	12
	-1	6	6	-1	6	6
				1	4	6

6 इकाइयों को 2 इकाइयों में से नहीं निकाला जा सकता इसलिए हम इसका पुनर्समूहन कर 12 इकाइयाँ बना लेते हैं। हमारे पास 0 दहाइयाँ बचीं। अब चूंकि 6 इकाइयों को 0 दहाई से निकाला नहीं जा सकता इसलिए हम एक सैकड़ को 10 दहाइयों में बदल लेते हैं। अतः हमारे पास 2 सैकड़ शेष रह जाते हैं और हम 10 दहाइयाँ बना लेते हैं।

गुणा : गुणा योग की पुनरावृत्ति है। इसे मूर्त क्रियाकलापों और उदाहरणों द्वारा समझाया जा सकता है। यदि तीन समूह हो और प्रत्येक में 5 गोलियाँ हों तो कुल मिलकर कितनी गोलियाँ हुईं ?

स्पष्ट है कि इसका उत्तर 15 होगा। परंतु यह उत्तर कैसे आया ?

00000 00000 00000

एक समूह में पांच गोलियाँ हैं।

3 समूह में $5 + 5 + 5 = 15$ गोलियाँ हैं या $5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$ गोलियाँ (तीन बार पांच)

हम कहते हैं तीन पंजे पन्द्रह होते हैं। अतः गुणन उसी संख्या का पुनरावृत्त योग है। इसमें 15 को 'गुणनफल' 3 को 'गुणक' और 5 को 'गुण्य' कहते हैं।

उदाहरण : 2342 को 2 से गुणा कीजिए।

2342	अथवा	$2 \times 2342 = 2 \times (2000 + 300 + 40 + 2)$
$\times 2$		$= 2 \times 2000 + 2 \times 300 + 2 \times$
<u>4684</u>		$40 + 2 \times 2$
		$= 4000 + 600 + 80 + 4$
		$= 4684$

स्पष्टीकरण 2×2 इकाई = 4 इकाइयाँ

2×4 दहाइयाँ = 8 दहाइयाँ

2×3 सैकड़ = 6 सैकड़

2×2 हजार = 4 हजार

उदाहरण : 344 को 10 से गुणा कीजिए।

$344 \times 10 = 344 \times 1$ दहाई
$= (344 \times 1)$ दहाइयाँ
$= 344$ दहाइयाँ
$= 3440$

उदाहरण : 8 को 1000 से गुणा कीजिए

$8 \times 1000 = 8 \times$ एक हजार
$= 8$ हजार
$= 8000$

उदाहरण : 77 को 23 से गुणा कीजिए।

$23 = (20 + 3)$ (2 दहाइयाँ + 3 इकाइयाँ)

इसलिए $77 \times 23 = 77 \times (20 + 3)$
$= 77 \times 20 + 77 \times 3$

चूंकि $77 \times 20 = 1540$ और $77 \times 3 = 231$
--

इसलिए $77 \times 23 = 1540 + 231 = 1771$
--

हम इसका इस प्रकार भी गुणन कर सकते हैं :

77	
$\times 23$	
<u>231</u>	$\leftarrow 3 \times 77$
154	$\leftarrow 20 \times 77$
<u>1771</u>	$\leftarrow 23 \times 76$

उत्तर :- 1771

विभाजन : विभाजन गुणन का उलटा होता है। इसे 'समान साझा' 'समान समूहन' के मूर्त अनुभव द्वारा बताएं। ये क्रिया कलाप पुनरावृत्त घटाने की धारणा की ओर ले जाते हैं।

उदाहरण : 15 मीठी गोलियों को 5 मित्रों में समान रूप से बांटना है। प्रत्येक को कितनी गोलियाँ मिलेंगी ?

इसे हल करने के लिए पता लगाएं कि कितनी बार 5 को 15 में से घटाया जा सकता है।

$15 - 5 = 10 \rightarrow 1$

$10 - 5 = 5 \rightarrow 2$

$5 - 5 = 0 \rightarrow 3$

अथवा $15 \div 5 = 3$

अतः प्रत्येक मित्र को तीन गोलियाँ मिलेंगी।

● **विभिन्न प्रकार की संख्याएं**

सम तथा विषम संख्याएं—जो संख्याएं 2 की गुणज हैं उन्हें सम संख्या कहते हैं और जो 2 की गुणज नहीं हैं उन्हें विषम संख्या कहते हैं।

सम संख्याओं के उदाहरण हैं 2, 4, 6, 8, 10, 12

विषम संख्याओं के उदाहरण हैं 1, 3, 5, 7, 9, 11

अभाज्य संख्याएं तथा भाज्य संख्याएं

आइए हम 2, 3, 5, 7 के सभी संभव गुणनखंडों को ज्ञात करें।

$$2 = 1 \times 2$$

$$3 = 1 \times 3$$

$$5 = 1 \times 5$$

$$7 = 1 \times 7$$

2 के संभावित गुणनखंड 1 और 2 हैं। 3 के संभावित गुणनखंड 1 और 3 हैं। 5 के संभावित गुणनखंड 1 और 5 हैं। इन संख्याओं के केवल दो गुणनखंड हैं। क्या आप ऐसी संख्याओं के नाम सुझा सकते हैं जिनके केवल दो गुणनखंड होते हैं?

हां, ऐसी संख्याओं को अभाज्य संख्याएं कहते हैं।

आइए हम 4, 6, 8, 12 के सभी गुणनखंडों को ज्ञात करें।

$$4 = 1 \times 4$$

$$4 = 2 \times 2$$

4 के गुणनखंड हैं 1, 2, 4

$$6 = 1 \times 6$$

$$6 = 2 \times 3$$

6 के गुणनखंड हैं 1, 2, 3, 6

$$8 = 1 \times 8$$

$$= 2 \times 2 \times 2$$

$$= 2 \times 4$$

8 के गुणनखंड हैं 1, 2, 4, 8

$$12 = 1 \times 12$$

$$12 = 2 \times 6$$

$$12 = 3 \times 4$$

अतः 12 के गुणनखंड हैं 1, 2, 3, 4, 6, 12

ऐसी संख्याएं जिनके गुणनखंड 2 से अधिक हों, भाज्य संख्याएं कहलाती हैं। अर्थात् वे पूर्व संख्याएं जो स्वयं और 1 के अतिरिक्त अन्य संख्या से भी भाज्य हों। अतः 4, 6, 8 एवं 12 भाज्य संख्याएं हैं।

असहभाज्य संख्याएं : दो संख्याओं 16 और 35 पर विचार कीजिए।

$$16 = 1 \times 16, 16 = 2 \times 8, 16 = 4 \times 4$$

अतः 16 के गुणनखंड हैं 1, 2, 4, 8 और 16

$$35 = 1 \times 35, 35 = 5 \times 7$$

अतः 35 के गुणनखंड हैं 1, 5, 7 और 35

16 और 35 का सार्वगुणनखंड अथवा समापवर्त्य 1 है।

दो संख्याएं जिनमें केवल 1 सार्वगुणनखंड हो, असहभाज्य कहलाती हैं।

युग्म अभाज्य संख्याएं : जिन अभाज्य संख्याओं के युग्म में उनके बीच केवल एक भाज्य संख्या होती है, वे युग्म अभाज्य संख्याएं कहलाती हैं।

उदाहरणतया 11 और 13 युग्म अभाज्य संख्याएं हैं क्योंकि इनके बीच केवल एक भाज्य संख्या 12 है।

● गुणज तथा गुणनखंड

गुणज :

$$2 \times 1 = 2$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 4 = 8$$

$$2 \times 5 = 10$$

2, 4, 6, 8, 10 संख्याएं, 2 के 1, 2, 3, 4, 5 से गुणा करने पर प्राप्त होती हैं। इन्हें 2 के गुणज कहते हैं।

यदि किसी दी गई संख्या को लगातार 1, 2, 3, 4, 5 से गुणा किया जाए तो हमें उस संख्या के गुणज प्राप्त होते हैं।

$$4 \text{ के गुणज हैं } 4, 8, 12, 16, 20, \dots$$

$$5 \text{ के गुणज हैं } 5, 10, 15, 20, 25, \dots$$

जब हम किन्हीं दो या अधिक संख्याओं को गुणा करते हैं तो हमें गुणनफल प्राप्त होता है। गुणनफल को गुणा की गई संख्याओं में से प्रत्येक का गुणज कहते हैं। यह दी गई संख्याओं का सार्वगुणज होता है।

आइए हम 5×4 पर विचार करें

20 की संख्या 5 और 4 दोनों का गुणज है। अतः यह सार्वगुणज अथवा समापवर्त्य है।

उदाहरण : 14 और 18 का दसवां गुणज ज्ञात कीजिए।

$$14 \times 10 = 140$$

$$18 \times 10 = 180$$

गुणनखंड :

गुणनखंड एक भाजक होता है। उदाहरण के लिए हम 21 की संख्या को लें। 21 के भाजक क्या हैं?

स्पष्ट है 1, 3, 7 और 21 इसके भाजक हैं क्योंकि

$$1 \times 21 = 21$$

$$3 \times 7 = 21$$

अतः 1, 3, 7, 21 ये सभी 21 के गुणनखंड कहलाते हैं।

उदाहरण : आइए, हम 24 के सभी गुणनखंड लिखें :

$$24 = 1 \times 24$$

$$24 = 2 \times 12$$

$$24 = 3 \times 8$$

$$24 = 4 \times 6$$

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 ये सभी 24 के गुणनखंड हैं। किसी भी संख्या का सबसे छोटा गुणनखंड एक है। किसी भी संख्या का सबसे बड़ा गुणनखंड स्वयं वह संख्या है।

● संख्याओं के लघुत्तम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्तक

महत्तम सार्वभाजक अथवा गुणनखंड (एच.सी.एफ.)

आइए, हम 24 और 16 इन संख्याओं पर विचार करें। हम 24 और 16 के गुणनखंड ज्ञात करते हैं :

$$24 = 1 \times 24$$

$$24 = 2 \times 12$$

$$24 = 3 \times 8$$

$$24 = 4 \times 6$$

अतः 24 के गुणनखंड हैं 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 और 24 अब 16 को लें :
 $16 = 1 \times 16, 16 = 2 \times 8, 16 = 4 \times 4$ । अतः 16 के गुणनखंड हैं 1, 2, 4, 8, 16। क्या आप 24 और 16 के समापवर्तक ज्ञात कर सकते हैं?

हां, 24 और 16 के समापवर्तक 1, 2, 4 और 8 हैं। इनमें से कौन-सा समापवर्तक महत्तम है? यह 8 है। हम 8 के बारे में क्या कह सकते हैं? हम कह सकते हैं कि 24 और 16 का महत्तम समापवर्तक 8 है।

लघुत्तम समापवर्त्य (एल.सी.एम.)

आइये, हम 2 और 5 के गुणजों पर विचार करें :

$$2 \text{ के गुणज हैं } 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

$$5 \text{ के गुणज हैं } 5, 10, 15, 20, 25, \dots$$

$$2 \text{ और पांच के सार्व गुणज हैं } 10, 20, 30, \dots$$

$$2 \text{ और पांच का लघुत्तम सार्वगुणज } 10 \text{ है।}$$

इसलिए हम इसे अर्थात् संख्या 10 को 2 और 5 का लघुत्तम समापवर्त्य कहते हैं।

प्रश्न 1. स्थानमान ज्ञात कीजिए :

- (i) 43 में 4 और 3 का
(ii) 237 में 2 और 7 का
(iii) 4375 में 4, 7 और 5 का

उत्तर : (i) 43 में 4 का स्थानमान 40 है।
43 में 3 का स्थानमान 3 है।
(ii) 237 में 2 का स्थानमान 200 है।
237 में 7 का स्थानमान 7 है।
(iii) 4375 में 4 का स्थानमान 4000 है।
4375 में 7 का स्थानमान 70 है।
4375 में 5 का स्थानमान 5 है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित को विस्तारित संकेतन में लिखिए :

- (i) 578 (ii) 9275
(iii) 439 22 (d) 20048

उत्तर : (i) $578 = 5 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1$
 $= 500 + 70 + 8$
(ii) $9275 = 9 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 5 \times 1$
 $= 9000 + 200 + 70 + 5$
(iii) $43922 = 4 \times 10000 + 3 \times 1000 + 9 \times 100 + 2 \times 10 + 2 \times 1$
 $= 40000 + 3000 + 900 + 20 + 2$
(iv) $20048 = 2 \times 10000 + 0 \times 1000 + 0 \times 100 + 4 \times 10 + 8 \times 1$
 $= 20000 + 40 + 8$

प्रश्न 3. निम्नलिखित को (i) आरोही क्रम में (ii) अवरोही क्रम में व्यवस्थित करें-

54, 35, 22, 490, 95, 54 97, 827

उत्तर : (i) $22 < 35 < 54 < 95 < 490 < 827 < 5497$
(ii) $5497 > 827 > 490 > 95 > 54 > 35 > 22$

प्रश्न 4. एक विद्यालय में 2366 छात्र हैं। इनमें से 1433 छात्र लड़के हैं। बताएं कितनी लड़कियां हैं? स्पष्टीकरण प्राप्त कीजिए।

उत्तर : छात्रों की कुल संख्या = 2366
लड़कों की कुल संख्या = 1433
 $\therefore$ लड़कियों की संख्या = 0933

प्रश्न 5. स्पष्टीकरण देते हुए निम्नलिखित को गुणा कीजिए :

- (i) 8 को 7 से (ii) 24×2
(iii) 112 को 3 से

उत्तर : (i) $8 \times 7 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 56$
(ii) 24
 $\begin{array}{r} \times 2 \\ 24 \\ \hline 48 \end{array}$ $[24 \times 2 = 24 + 24 = 48]$
(iii) 112
 $\begin{array}{r} \times 3 \\ 112 \\ \hline 336 \end{array}$ $[112 \times 3 = 112 + 112 + 112 = 336]$

प्रश्न 6. सुरेश ने टॉफियों के तीन पैकेट खरीदे। प्रत्येक पैकेट में 125 टॉफियां हैं। बताइए तीनों पैकेट में कुल कितनी टॉफियां हैं?

उत्तर : एक पैकेट में टॉफियों की संख्या = 125
तीन पैकेट में टॉफियों की संख्या = $125 \times 3 = 375$

प्रश्न 7. सम संख्याओं पर घेरा लगाइए।

7, 10, 12, 15, 24, 36, 38

उत्तर : 7, 10, 12, 15, 24, 36, 38

प्रश्न 8. विषम संख्याओं पर घेरा लगाइए।

5, 8, 12, 17, 21, 36, 38, 39, 42

उत्तर : 5, 8, 12, 17, 21, 36, 38, 39, 42

प्रश्न 9. एक से लेकर 30 तक के बीच की सभी सम और विषम संख्याओं को अलग-अलग लिखिए।

उत्तर : एक से लेकर 30 तक सभी सम संख्याएं—
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30
विषम संख्याएं—
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29

प्रश्न 10. क्या 13 अभाज्य संख्या है?

उत्तर : हां, 13 अभाज्य संख्या है।

प्रश्न 11. 11 से 51 के बीच की सभी अभाज्य संख्याओं को लिखिए।

उत्तर : 11 से 51 के बीच की सभी अभाज्य संख्याएं—
13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

प्रश्न 12. 30 तक की सभी भाज्य संख्याओं को लिखिए।

उत्तर : भाज्य संख्याएं—4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30

प्रश्न 13. निम्नलिखित में कौन-सा युग्म, अभाज्य संख्याओं का जोड़ा है?

- (क) 3, 5 (ख) 15, 19

उत्तर : 3 और 5 युग्म अभाज्य संख्याएं हैं।

प्रश्न 14. (i) क्या 24, 5 का गुणज है?

(ii) 9 का दसवां गुणज ज्ञात कीजिए।

उत्तर : (i) नहीं
(ii) 9 का दसवां गुणज है $= 9 \times 10 = 90$

प्रश्न 15. 32 और 48 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

उत्तर : 32 और 48 का महत्तम समापवर्तक
32 के गुणनखंड = 1, 2, 4, 8, 16, 32
48 के गुणनखंड = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48
इसलिए 32 और 48 के सार्वगुणनखंड = 1, 2, 4, 8, 16
अतः महत्तम समापवर्तक = 16

प्रश्न 16. (i) 12, 15, 10 का और (ii) 9, 27, 6 का लघुत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

उत्तर : (i) 12, 15, 10 का एल.सी.एम.
12 के गुणज हैं : 12, 24, 36, 48, 60, 72
15 के गुणज हैं : 15, 30, 45, 60, 75
10 के गुणज हैं : 10, 20, 30, 40, 50, 60
12, 15 और 10 का लघुत्तम समापवर्तक = 60
(ii) 9, 27, 6 का लघुत्तम समापवर्तक
9 के गुणज हैं : 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63
27 के गुणज हैं : 27, 54, 81
6 के गुणज हैं : 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54..
9, 27 और 6 का लघुत्तम समापवर्तक = 54

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. यदि पांचवीं कक्षा का छात्र मोहन $2 + 3 = 6$ लिखता है तो हम कह सकते हैं कि उसे—

- (a) गणित का ज्ञान नहीं है। (b) जोड़ का ज्ञान नहीं है।
(c) लिखने का ज्ञान नहीं है। (d) पढ़ने का ज्ञान नहीं है।

उत्तर—(b)

व्याख्या : $2 + 3 = 6$ लिखने से यह ज्ञात होता है कि मोहन को जोड़ का ज्ञान नहीं है।

प्रश्न 2. यदि कक्षा चार का छात्र सुमित $8 + 3 = 12$, $9 - 2 = 6$, $8 \times 2 = 15$ तथा $6 \div 2 = 4$ लिखता है तो हम कहेंगे कि उसे—

- (a) गणित का चारों क्रियाओं जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग का ज्ञान नहीं है।
(b) जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग का बहुत अच्छा ज्ञान है।
(c) अनुभव की कमी है।
(d) रेखागणित का अच्छा ज्ञान नहीं है।

उत्तर—(a)

व्याख्या : कक्षा चार के छात्र सुमित द्वारा इस प्रकार लिखे जाने से ज्ञात होता है कि उसे गणित की चारों क्रियाओं जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग का ज्ञान नहीं है।

प्रश्न 3. पहला धन पूर्णांक है—

- (a) एक (b) दो (c) तीन (d) शून्य

उत्तर—(a)

व्याख्या : एक (1) पहला धन पूर्णांक संख्या है।

प्रश्न 4. क्या हम सबसे बड़ा धन पूर्णांक लिख सकते हैं?

- (a) लिखा जा सकता है।
(b) लिखा नहीं जा सकता है।
(c) कभी-कभी लिखा जा सकता है।
(d) केवल एक स्थिति में लिखा जा सकता है।

उत्तर—(b)

व्याख्या : सबसे बड़ी धन पूर्णांक संख्या लिखी नहीं जा सकती है।

प्रश्न 5. पुनरावृत्त योग की प्रक्रिया है—

- (a) घटाव (b) गुणन (c) भाग (d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

उत्तर—(b)

व्याख्या : गुणन पुनरावृत्त योग की प्रक्रिया है।

प्रश्न 6. जोड़ने की क्रिया की उलटी क्रिया कौन सी है?

- (a) घटाना (b) गुणा करना
(c) भाग देना (d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

उत्तर—(a)

व्याख्या : जोड़ने की उलटी क्रिया घटाना है।

प्रश्न 7. पुनरावृत्त घटाने की प्रक्रिया है—

- (a) जोड़ (b) गुणन (c) भाग (d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

उत्तर—(c)

व्याख्या : भाग पुनरावृत्त घटाने की प्रक्रिया है।

● संख्या पद्धति (Number System)

इतिहास के अध्ययन से पता चलता है कि बहुत प्राचीन समय से ही गणित का प्रयोग किया जाता रहा है। आरम्भ में मनुष्य ने वस्तुओं को गिनने के लिए आंकड़ों और सीपियों का प्रयोग किया। उसके बाद रस्सी पर गांठे लगाकर, लकड़ी के ऊपर निशान लगाकर या उंगलियों के प्रयोग से गिनना

प्रारम्भ हुआ और फिर संकेतों, चिह्नों और चित्रों का प्रयोग होने लगा, परन्तु अब सभी देशों ने भारतीय अरेबिक अंक प्रणाली को ही मान लिया है। भारतीयों ने शून्य का आविष्कार करके बड़ी-बड़ी संख्याओं को लिखना बहुत सरल बना दिया।

अंक (digits) : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 अंक कहलाते हैं।

संख्याएं : संख्याएं कई प्रकार की होती हैं। सबसे पहले हम धन पूर्ण संख्याओं का अध्ययन करेंगे हैं—

1. धन पूर्ण संख्याएं (Positive Integers)—जिन संख्याओं की सहायता से वस्तुओं की गणना की जाती है, उन्हें धन पूर्ण संख्याएं कहते हैं। जैसे—1, 2, 3, 4, 5 9, 10, 11, 12, 13 202, 203, 204 1001, 1002, 1003। सबसे छोटी धन पूर्ण संख्या "1" है।

विशेषताएं (Properties)—

(i) संवरक गुण (Closure Property)—

$$(A) 3 + 4 = 7$$

$$4 + 6 = 10$$

अतः दो धन पूर्ण संख्याओं का योग भी धन पूर्ण संख्या होती है। धन पूर्ण संख्याओं के इस गुण को योग का संवरक गुण कहते हैं।

$$(A) 4 \times 6 = 24$$

$$(B) 3 \times 5 = 15$$

अतः दो धन पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी धन पूर्ण संख्या होती है। इस गुण को गुणा का संवरक गुण कहते हैं।

इस प्रकार यदि 'a' और 'b' कोई दो धन पूर्ण संख्याएं हों, तो

$$(A) a + b = \text{धन पूर्ण संख्या}$$

$$(B) a \times b = \text{धन पूर्ण संख्या}$$

नोट—व्यवकलन तथा भाग की क्रिया में संवरक नियम लागू नहीं होता है।

2. क्रम विनिमेय नियम : (Commutative Law)—दो धन पूर्ण संख्याओं का योगफल उनका क्रम बदलने पर भी वही रहता है। अतः उनके योगफल पर संख्याओं के क्रम का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। जैसे—

$$4 + 6 = 10$$

और क्रम बदलने पर

$$6 + 4 = 10$$

$$3 + 6 = 6 + 3$$

इसी तरह यदि 'a' और 'b' कोई दो धन पूर्ण संख्याएं हों, तो

$$a + b = b + a$$

यह योग का क्रम विनिमेय नियम कहलाता है।

दो धन पूर्ण संख्याओं का गुणनफल उनका क्रम बदलने पर भी वही रहता है। अतः उनके गुणनफल में क्रम का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

$$\text{जैसे:—} 5 \times 7 = 35$$

और क्रम बदलने पर

$$7 \times 5 = 35$$

$$5 \times 7 = 7 \times 5$$

इसी प्रकार यदि 'a' और 'b' कोई दो धन पूर्ण संख्याएं हो, तो $a \times b = b \times a$ इसे गुणन का क्रम विनिमेय नियम कहते हैं।

3. साहचर्य नियम (Associative Law)—यदि कोई तीन धन पूर्ण संख्याएं हों जैसे—3, 4, 5 तो

$$3 + (4 + 5) = 3 + 9$$

$$= 12$$

$$\text{तथा } (3 + 4) + 5 = 7 + 5$$

$$= 12$$

$$\therefore 3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5$$

अतः अलग-अलग गुणन नियमों का योगफल में कोई अन्तर नहीं आता। अतः विभिन्न युगलों का योगफल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

अतः a, b और c कोई तीन धन पूर्ण संख्याएं होने पर

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

इस नियम को योग का साहचर्य नियम कहते हैं।

इसी प्रकार यदि a, b और c कोई तीन धन पूर्ण संख्याएं हों, तो $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ इस नियम को गुणा का साहचर्य नियम कहते हैं।

4. वितरण नियम (Distributive Law)—यदि a, b, c कोई तीन धन पूर्ण संख्याएं हों, तो

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$\text{और } (b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

$$\text{जैसे, } 6 \times (4 + 3) = 6 \times 4 + 6 \times 3$$

$$6 \times 7 = 24 + 18$$

$$42 = 42$$

यह नियम योग पर गुणन का वितरण नियम कहलाता है।

● गुणनात्मक तत्समक (Multiplicative Inverse)

हम यह जानते हैं कि $7 \times 1 = 7$, $1 \times 8 = 8$

यदि किसी संख्या को '1' से गुणा किया जाय तो वह संख्या नहीं बदलती। अतः किसी धन पूर्ण संख्या 'a' के लिए $a \times 1 = a$ इसलिए '1' को गुणनात्मक तत्समक कहते हैं।

● शून्य (Zero)

धन संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5.....के अतिरिक्त एक ऐसी संख्या की भी परिकल्पना की गयी है जिसे किसी भी धन संख्या में जोड़ने पर उस धन संख्या का मान नहीं बदलता है। इसे 'शून्य' कहते हैं और इसे प्रतीक '0' से प्रकट किया जाता है।

● ऋण पूर्ण संख्याएं (Negative Integers)

सभी धन पूर्ण संख्याओं के साथ ऋण (-) का चिह्न लगाने से वे ऋण पूर्ण संख्याएं बन जाती हैं। -1, -2, -3, -4, -5, -6 सभी ऋण पूर्ण संख्याएं कहलाती हैं।

● पूर्ण संख्याएं (Integers)

धन पूर्ण संख्याएं शून्य और ऋण पूर्ण संख्याओं को मिलाकर प्राप्त संख्याएं पूर्ण संख्याएं कहलाती हैं। इन्हें पूर्णांक भी कहते हैं।

अतः -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 पूर्ण संख्याएं हैं।

● प्राकृत संख्याएं (Natural Numbers)

जिन संख्याओं से गिनती की क्रिया की जाती है उन्हें प्राकृत संख्याएं कहा जाता है, जैसे : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 आदि प्राकृत संख्याएं हैं।

● सम संख्याएं (Even Numbers)

वे प्राकृत संख्याएं जो 2 से विभाज्य हों उन्हें सम संख्याएं कहा जाता है, जैसे-2, 4, 6, 8, 10.....आदि

● विषम संख्याएं (Odd Numbers)

वे प्राकृत संख्याएं जो 2 से विभाज्य नहीं हों उन्हें विषम संख्याएं कहा जाता है, जैसे-1, 3, 5, 7, 9, 11 इत्यादि।

● भाज्य संख्याएं (Composite Numbers)

उन पूर्ण संख्याओं को भाज्य संख्याएं कहते हैं जिनके स्वयं और 1 के अतिरिक्त और भी गुणनखंड होते हैं। जैसे-4, 6, 8, 9, 15, 16, 18, 20..... इत्यादि।

● अभाज्य संख्याएं (Prime Numbers)

वे पूर्ण संख्याएं जो भाज्य नहीं हैं अर्थात् जिन संख्याओं के गुणनखंड 1 और दी हुई संख्या के अतिरिक्त कोई और पूर्ण संख्या न हो, अभाज्य संख्याएं कहलाती हैं। जैसे 2, 3, 5, 7, 11, 13..... आदि।

● सह-अभाज्य संख्याएं (Co-prime Numbers)

दो संख्याएं जिनमें '1' के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो, सह-अभाज्य संख्याएं कहलाती हैं। जैसे 9 तथा 16 सह-अभाज्य हैं क्योंकि 9 और 16 में '1' के अतिरिक्त कोई भी उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

● परिमेय संख्याएं (Rational Numbers)

एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक (शून्य के अलावा) से भाग देने पर जो लघुतम रूप प्राप्त होता है उसे परिमेय संख्या कहते हैं जैसे $\frac{a}{b}$ (जहाँ $b \neq 0$) एक परिमेय संख्या है।

सभी पूर्ण संख्याओं को $\frac{a}{b}$ के रूप में निरूपित किया जा सकता है। इन सबका हर '1' होता है जैसे- $\frac{2}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-6}{1}, \frac{4}{1}$

अतः सभी पूर्ण संख्याएं परिमेय संख्याएं होती हैं परन्तु सभी परिमेय संख्याएं पूर्ण संख्याएं नहीं होती।

उदाहरण : परिमेय संख्याएं $\frac{5}{7}, \frac{-3}{11}, \frac{1}{11}$... पूर्ण संख्याएं नहीं हैं।

● अपरिमेय संख्याएं (Irrational Numbers)

वह वास्तविक संख्या जो परिमेय संख्या नहीं हो उसे अपरिमेय संख्या कहा जाता है, जैसे- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \pi$ इत्यादि अपरिमेय संख्याएं हैं। अपरिमेय संख्याएं दशमलव के रूप में बदलने पर न तो आवर्ती (Recurring) के रूप में आती हैं न ही इनका कोई निश्चित अन्त होता है।

● वास्तविक संख्याएं (Real Numbers)

परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्याएं कहा जाता है।

● योगात्मक तत्समक (Additive Identity)

यदि किसी संख्या में शून्य जोड़ा जाय तो योगफल वही संख्या होती है। अतः किसी संख्या 'a' के लिए, $a + 0 = a$ इसलिए शून्य को योगात्मक तत्समक कहते हैं।

● विभाज्यता

2 से भाग—वह संख्या जिसके इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6, 8 अंकों में से कोई एक अंक हो, 2 से पूरी-पूरी विभाजित हो जाती है। जैसे- 12, 24, 36, 48, 80।

3 से भाग—यदि दी हुई संख्या के अंकों का योगफल 3 से विभाजित होता हो वह संख्या भी तीन से विभाजित होगी। जैसे : 624

624 के अंकों का योग = $6 + 2 + 4 = 12$ जो कि 3 से विभाज्य है क्योंकि $12 = 3 \times 4$, अतः 624 भी तीन से विभाज्य है।

4 से भाग-यदि किसी संख्या के इकाई और दहाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित हो जाती है तो दी हुई संख्या भी 4 से विभाजित हो जाएगी।

उदाहरण : 1124, 1312, 1100, 1348, 11132 इत्यादि।

5 से भाग-ऐसी संख्या जिसमें इकाई का अंक शून्य या 5 हो, 5 से विभाजित हो जाएगी।

जैसे- 10, 15, 25, 410, 525 इत्यादि।

6 से भाग-ऐसी सम संख्या जो 3 से विभाजित होती है, 6 से विभाजित होगी। जैसे 312, 624, 810, 7314।

8 से भाग-यदि किसी संख्या के इकाई, दहाई और सैकड़ा के अंकों से बनी संख्या 8 से पूरी-पूरी विभाजित हो जाय, तो दी हुई संख्या भी 8 से विभाजित होगी।

जैसे- 2864, 6032, 1689752 इत्यादि।

9 से भाग-यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाजित हो तो वह संख्या भी 9 से विभाजित होगी।

जैसे- 2313

यहाँ अंकों का योग $2 + 3 + 1 + 3 = 9$

$$= 9 \times 1$$

इसलिए दी गई संख्या 9 से विभाज्य होगी।

11 से भाग-यदि किसी संख्या के दायीं ओर से विषम स्थानों के अंकों के योग और सम स्थानों के अंकों के योगफल का अन्तर शून्य या 11 से विभाजित हो तो वह संख्या भी 11 से विभाजित हो जाती है।

जैसे- 909183

यहाँ विषम स्थानों के अंकों का योग = $3 + 1 + 0 = 4$

सम स्थानों के अंकों का योग = $8 + 9 + 9 = 26$

दोनों योगफलों का अन्तर = $26 - 4$

$$= 22$$

$$= 11 \times 2$$

इसलिए दी हुई संख्या 11 से विभाजित होगी।

कुछ मुख्य विशेष सूत्र :

(i) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

(ii) $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

(iii) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(iv) $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

या $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

(v) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

या $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a + b)$

(vi) $(a + b)^3 = (a^3 + b^3 + 3ab(a + b))$

(vii) $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

(viii) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

1. $\frac{-9}{10} + \frac{22}{15} + \frac{13}{-20}$ का मान होगा-

(a) $\frac{-1}{12}$

(b) $\frac{2}{6}$

(c) $\frac{3}{5}$

(d) $\frac{1}{4}$

उत्तर-(a)

$$\begin{aligned} \text{हल:-} \quad & \frac{-9}{10} + \frac{22}{15} + \frac{13}{-20} = \frac{-9}{10} + \frac{22}{15} - \frac{13}{20} \\ & = \frac{-54}{60} + \frac{88}{60} - \frac{39}{60} \\ & = \frac{88}{60} - \frac{93}{60} \\ & = \frac{-5}{60} = \frac{-1}{12} \end{aligned}$$

2. दो परिमेय संख्याओं का योग $\frac{-4}{5}$ है। यदि एक संख्या $\frac{-7}{20}$ हो, तो दूसरी संख्या होगी-

(a) $\frac{-8}{20}$

(b) $\frac{5}{6}$

(c) $\frac{-9}{20}$

(d) $\frac{3}{7}$

उत्तर-(c)

$$\begin{aligned} \text{हल:-} \quad & \frac{-4}{5} - \left(\frac{-7}{20}\right) = \frac{-4}{5} + \frac{7}{20} \\ & = \frac{-16}{20} + \frac{7}{20} \\ & = \frac{-9}{20} \end{aligned}$$

3. दो परिमेय संख्याओं का योग -8 है। यदि इनमें से एक संख्या $\frac{-15}{7}$ हो, तो दूसरी संख्या होगी-

(a) $\frac{5}{6}$

(b) $\frac{-41}{7}$

(c) $\frac{-2}{3}$

(d) $\frac{1}{2}$

उत्तर-(b)

$$\begin{aligned} \text{हल:-} \quad & \frac{(-8)}{1} - \frac{(-15)}{7} = -8 + \frac{15}{7} \\ & = \frac{-56 + 15}{7} \\ & = \frac{-41}{7} \end{aligned}$$

4. $\frac{-8}{9}$ का $\frac{5}{5}$ से भाग देने पर प्राप्त होगा-

- (a) $\frac{2}{60}$ (b) $\frac{5}{6}$
(c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{40}{63}$

उत्तर-(d)

$$\begin{aligned}\text{हल- } \frac{-8}{9} \div \left(\frac{-7}{5}\right) &= \frac{-8}{9} \times \frac{5}{-7} \\ &= \frac{(-8) \times 5}{9 \times (-7)} = \frac{-40}{-63} = \frac{40}{63}\end{aligned}$$

5. दो संख्याओं का गुणनफल $\frac{-14}{27}$ है। यदि इनमें से एक संख्या $\frac{7}{9}$ हो, तो दूसरी संख्या होगी-

- (a) $\frac{-2}{3}$ (b) $\frac{4}{3}$
(c) $\frac{5}{2}$ (d) $\frac{8}{9}$

उत्तर-(a)

$$\begin{aligned}\text{हल- } \frac{-14}{27} \div \frac{7}{9} &= \frac{-14}{27} \times \frac{9}{7} \\ &= \frac{-14 \times 9}{27 \times 7} \\ &= \frac{-2}{3}\end{aligned}$$

6. $\frac{-2}{3}$ के घन और $\frac{4}{-5}$ के वर्ग का गुणनफल होगा-

- (a) $\frac{72}{38}$ (b) $\frac{-128}{675}$
(c) $\frac{-527}{238}$ (d) $\frac{535}{338}$

उत्तर-(b)

$$\begin{aligned}\text{हल- } \frac{-2}{3} \text{ का घन} &= \left(\frac{-2}{3}\right)^3 \\ &= \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \\ &= \frac{-8}{27}\end{aligned}$$

$$\text{और } \frac{4}{-5} \text{ का वर्ग} = \left(\frac{4}{-5}\right)^2$$

$$= \frac{4}{-5} \times \frac{4}{-5} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट गुणनफल} = -\frac{8}{27} \times \frac{16}{25} = \frac{-128}{675}$$

7. $\frac{8}{27}$ का घातीय रूप होगा-

- (a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ (b) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$
(c) $\left(\frac{5}{2}\right)^3$ (d) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

उत्तर-(a)

$$\begin{aligned}\text{हल- } \frac{8}{27} &= \frac{2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3} \\ &= \frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3\end{aligned}$$

8. .15 को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त करने पर अभीष्ट उत्तर होगा-

- (a) $\frac{5}{9}$ (b) $\frac{4}{3}$
(c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{20}$

उत्तर-(d)

$$\begin{aligned}\text{हल- } .15 &= 1 \text{ दशांश} + 5 \text{ शतांश} \\ &= 1 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{1}{100}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{5}{100}$$

$$= \frac{10}{100} + \frac{5}{100}$$

$$= \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

9. 0.675 को निरूपित करने वाली परिमेय संख्या न्यूनतम पदों में होगी-

- (a) $\frac{27}{40}$ (b) $\frac{23}{40}$
(c) $\frac{34}{37}$ (d) $\frac{32}{35}$

उत्तर-(a)

$$\text{हल- } 0.675 = \frac{675}{1000} = \frac{25 \times 27}{25 \times 40} = \frac{27}{40}$$

10. वह सबसे छोटी संख्या क्या होगी जिसे 12, 16, 24 और 36 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 7 शेष बचता हो?

- (a) 151 (b) 121
(c) 212 (d) 111

उत्तर-(a)

$$\text{हल- } 12, 16, 24 \text{ और } 36 \text{ का ल. स.}$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$= 144$$

$$\text{अतः अभीष्ट संख्या} = 144 + 7 = 151$$

11. शेखर एक प्रसिद्ध क्रिकेट खिलाड़ी है। वह टेस्ट मैचों में अब तक 6980 रन बना चुका है। वह 10,000 रन पूरा करना चाहता है। उसे कितने और रनों की आवश्यकता होगी?

(a) 580 रन (b) 3,020 रन
(c) 9,735 रन (d) 6,322 रन

उत्तर-(b)

$$\text{हल}-10,000-6,980=3,020$$

12. 12×35 का मान होगा-

(a) 420 (b) 530
(c) 234 (d) 336

उत्तर-(a)

$$\text{हल}-12 \times 35 = 6 \times 2 \times 35 = 6 \times 70 = 420$$

13. वह छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या बताइए जिसे 18265 में से घटाने पर शेषफल पूर्ण वर्ग बन जाय?

(a) 45 (b) 40
(c) 42 (d) 46

उत्तर-(b)

हल-दी गई संख्या का वर्गमूल निकालने पर

$$\sqrt{18265} = \sqrt{18225 + 40} = \sqrt{(135)^2 + 40}$$

अतः यदि संख्या में से 40 घटा दिया जाय तो शेषफल पूर्ण वर्ग होगा।

14. निम्नलिखित में से चार अंकों की बड़ी से बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या होगी-

(a) 9801 (b) 9999
(c) 9151 (d) 8306

उत्तर-(a)

हल-चार अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या = 9999

$$9999 \text{ का वर्गमूल} = \sqrt{9999} = \sqrt{99^2 + 198}$$

स्पष्ट है कि संख्या 9999, $(99)^2$ से 198 अधिक है।

∴ चार अंकों की बड़ी से बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या = $9999 - 198 = 9801$

15. 'm' और 'n' दो धन पूर्णांक हैं, यदि $m^n = 36$ हो, तो n^m का मान कितना होगा?

(a) 25 (b) 36
(c) 64 (d) 121

उत्तर-(c)

$$\text{हल}-\because m^n = 36 = 6^2$$

$$\Rightarrow m = 6 \text{ तथा } n = 2$$

(आधार एवं घात की तुलना की गई)

$$\therefore n^m = 2^6$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= 64$$

16. 'x' और 'y' दो धन पूर्णांक हैं, यदि $x^y = 9$ हो, तो y^x का मान क्या होगा?

(a) 8 (b) 64
(c) 81 (d) 25

उत्तर-(a)

$$\text{हल}-x^y = 9 = 3^2,$$

$$\text{अतः } x = 3 \text{ तथा } y = 2,$$

(आधार एवं घात की तुलना की गई)

$$\therefore y^x = 2^3$$

$$= 2 \times 2 \times 2 = 8$$

17. यदि $(x+3):(x+8)$ का अनुपात 2:3 है, तो x का मान होगा-

(a) 5 (b) 9
(c) 7 (d) 11

उत्तर-(c)

$$\text{हल}-\frac{x+3}{x+8} = \frac{2}{3}$$

$$3x+9=2x+16$$

(तिर्यक गुणा किया गया)

$$3x-2x=16-9$$

(पक्षांतर करके घटाने पर)

$$\therefore x = 7$$

18. $\sqrt{5}:\sqrt{6}$ का वर्ग अनुपात $2x+3:5x-38$ है। x का मान क्या होगा?

(a) 16 (b) 25
(c) 22 (d) 12

उत्तर-(a)

$$\text{हल-प्रश्नानुसार } \frac{2x+3}{5x-38} = \frac{(\sqrt{5})^2}{(\sqrt{6})^2}$$

$$\frac{2x+3}{5x-38} = \frac{5}{6}$$

$$12x+18=25x-190$$

(तिर्यक गुणा किया गया)

$$13x = 208$$

(पक्षांतर करके हल किया गया)

$$x = 16$$

19. यदि दो संख्याओं का योग 104 तथा उनका अन्तर 30 हो, तो उनके वर्गों का अन्तर होगा-

(a) 6120 (b) 3120
(c) 4041 (d) 6130

उत्तर-(b)

$$\text{हल}-x+y=104 \quad \dots\dots\dots(i)$$

$$x-y=30 \quad \dots\dots\dots(ii)$$

समी. (i) में से समी. (ii) घटाने पर $2y=74$

$$y=37$$

समी. (i) में y का मान रखने पर $x+37=104$

$$x=104-37$$

$$=67$$

$$\therefore x^2-y^2=67^2-37^2$$

$$=(67+37)(67-37)$$

$$[\text{सूत्र } A^2-B^2=(A+B)(A-B) \text{ का प्रयोग किया गया}]$$

$$=104 \times 30$$

$$=3120$$

20. यदि किसी संख्या का 40 प्रतिशत 360 हो, तो वह संख्या होगी-

(a) 700 (b) 800
(c) 900 (d) 1000

उत्तर-(c)

हल-माना वह संख्या x है

प्रश्नानुसार,

$$x \text{ का } 40\% = 360$$

$$x \times \frac{40}{100} = 360$$

$$\therefore x = \frac{360 \times 100}{40} = 900$$

21. 647135 में 7 तथा 3 के स्थानीय मानों का अन्तर होगा—

(a) 5067 (b) 4035
(c) 3060 (d) 6970

उत्तर—(d)

हल—7 का स्थानीय मान = 7000

3 का स्थानीय मान = 30

अतः अभीष्ट अंतर = 7000 - 30 = 6970

22. यदि 'a' और 'b' दो धन पूर्णांक हों तथा $a^x = 64$ हो तो x^a का मान होगा—

(a) 256 (b) 235
(c) 238 (d) 250

उत्तर—(a)

हल— $\therefore a^x = 64$
 $= 8^2$

आधार एवं घात की तुलना करने पर

$\Rightarrow a = 8$ तथा $x = 2$

$\therefore x^a = 2^8$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

23. 2, 3, 4, 5, तथा 6 में से प्रत्येक से विभक्त होने वाली छोटी से छोटी संख्या जो पूर्ण वर्ग है, कौन सी होगी?

(a) 500 (b) 800
(c) 900 (d) 700

उत्तर—(c)

हल—2, 3, 4, 5 तथा 6 का ल. स. = 60

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

इसे पूर्ण वर्ग बनाने के लिए 3×5 से गुणा करना होगा

अतः अभीष्ट संख्या = 60×15
 $= 900$

24. किसी संख्या को 32 से भाग देने पर 29 शेष बचता है। इसी संख्या को 8 से भाग देने पर शेषफल होगा—

(a) 3 (b) 5
(c) 7 (d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर—(b)

हल—माना इस संख्या को 32 से भाग देने पर भागफल k तथा शेषफल 29 प्राप्त होता है।

प्रश्नानुसार, $32k + 29 = 8 \times 4k + 8 \times 3 + 5$
 $= 8 \times (4k + 3) + 5$

25. संख्या 4456 में वह कौन सी छोटी से छोटी संख्या जोड़ी जाय कि योगफल 6 से पूर्णतया विभक्त हो जाय?

(a) 4 (b) 1
(c) 2 (d) 5

उत्तर—(c)

हल—4456 में 6 से भाग देने पर शेषफल 4 होगा।

अतः जोड़ी जाने वाली संख्या = $(6 - 4) = 2$

26. संख्या 11158 में वह कौन सी छोटी से छोटी संख्या जोड़ी जाय कि योगफल 77 से पूर्णतया विभक्त हो जाय?

(a) 0 (b) 8

(c) 7

(d) 5

उत्तर—(c)

हल—11158 में 77 का भाग देने पर शेषफल = 70

$\therefore$ अभीष्ट संख्या = $77 - 70 = 7$

27. यदि $*35624$, 11 से पूर्णतया विभक्त हो, तो * के स्थान पर अंक होगा—

(a) 6 (b) 5
(c) 2 (d) 7

उत्तर—(a)

हल—माना वह अंक x है।

$(4 + 6 + 3) - (2 + 5 + x) = 0$

अतः $x = 13 - 7 = 6$

28. वह बड़ी से बड़ी प्राकृत संख्या क्या होगी, जो चार क्रमागत प्राकृत संख्याओं के गुणनफल को विभक्त कर सके?

(a) 6 (b) 12
(c) 24 (d) 120

उत्तर—(c)

हल— $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

अतः वह संख्या 24 होगी।

29. $777777 \div ? = 11$ हो तो प्रश्न चिह्न के स्थान पर होगा—

(a) 70707 (b) 70700
(c) 7077 (d) 777

उत्तर—(a)

हल—माना वह संख्या x है।

$\therefore \frac{777777}{x} = 11$

$x = \frac{777777}{11} = 70707$

30. $\frac{13}{15}$, $\frac{15}{17}$, $\frac{17}{19}$ तथा $\frac{19}{21}$ में से सबसे बड़ी संख्या है—

(a) $\frac{13}{15}$ (b) $\frac{15}{17}$
(c) $\frac{17}{19}$ (d) $\frac{19}{21}$

उत्तर—(d)

हल—यदि दिये गये साधारण भिन्नों के अंश तथा हर का अन्तर समान हो

तो सबसे बड़े अंश वाला भिन्न सबसे बड़ा होता है। अतः भिन्न $\frac{19}{21}$ सबसे बड़ा भिन्न संख्या है।

31. $\frac{1}{.04}$ का मान होगा—

(a) .025 (b) .25
(c) 2.5 (d) 25

उत्तर—(d)

हल— $\frac{1}{.04} = \frac{100}{4} = 25$

32. 19.5 मीटर लम्बी लोहे की छड़ में से समान लम्बाई के कितने टुकड़े बनेंगे, जबकि प्रत्येक टुकड़ों की लम्बाई 65 सेमी. हो?

(a) 20 (b) 300
(c) 30 (d) 3

उत्तर-(c)

$$\text{हल-अभीष्ट टुकड़ों की संख्या} = \frac{19.5 \times 100}{65} = 30$$

($\therefore$ 1 मीटर = 100 सेमी.)

33. यदि $\left(a + \frac{1}{a}\right) = 3$, तो $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$ का मान होगा-

(a) 9 (b) 11
(c) 7 (d) 18

उत्तर-(c)

$$\text{हल-}\left(a + \frac{1}{a}\right) = 3 \dots\dots\dots(i)$$

सभी (i) का वर्ग करने पर

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 3^2$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 9$$

$$\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 9 - 2 = 7$$

34. $0.\overline{234}$ का मान होगा-

(a) $\frac{238}{935}$ (b) $\frac{234}{999}$

(c) $\frac{336}{590}$ (d) $\frac{323}{454}$

उत्तर-(b)

$$\text{हल-} .\overline{234} = .234234\dots\dots\dots(1)$$

$$1000 \times .\overline{234} = 234.234\dots\dots\dots(2)$$

समी. (2) से समी. (1) को घटाने पर

$$999 \times 0.\overline{234} = 234$$

$$\therefore 0.\overline{234} = \frac{234}{999}$$

35. $\frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}$ का न्यूनतम परिमेय रूप होगा-

(a) $\frac{x+2}{x-2}$ (b) $\frac{x-1}{x+2}$

(c) $\frac{x+2}{x-1}$ (d) $\frac{x-2}{x+2}$

उत्तर-(d)

$$\text{हल-}\frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 - 2^2}{(x + 2)^2}$$

$$= \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x + 2)}$$

[$\therefore A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ तथा $(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ का प्रयोग किया गया]

$$= \frac{x - 2}{x + 2}$$

36. निम्नलिखित में से छः अंकों की छोटी से छोटी पूर्ण वर्ग संख्या है-

(a) 111285 (b) 100345
(c) 100000 (d) 100489

उत्तर-(d)

हल-छः अंकों की छोटी से छोटी संख्या = 100000

$$\sqrt{100000} = \sqrt{(317)^2 - 489}$$

अतः छः अंकों की छोटी से छोटी पूर्ण वर्ग संख्या
= 100000 + 489 = 100489

37. एक धनात्मक पूर्णांक का 20 गुना अपने वर्ग से 96 कम है। वह पूर्णांक क्या होगा?

(a) 20 (b) 24
(c) 30 (d) 34

उत्तर-(b)

हल-माना धनात्मक पूर्णांक x है।

प्रश्नानुसार, $x^2 = 20x + 96$

$$x^2 - 20x - 96 = 0$$

$$x^2 - 24x + 4x - 96 = 0$$

$$x(x - 24) + 4(x - 24) = 0$$

$$(x - 24)(x + 4) = 0$$

$$x = 24, -4$$

अतः अभीष्ट विकल्प (b) है।

38. यदि 3167 को 4093 में जोड़ा जाए और प्राप्त योग को 145 से विभाजित किया जाए, तो उसका सन्निकट परिणाम होगा-

(a) 85 (b) 65
(c) 50 (d) 40

उत्तर-(c)

$$\text{हल-वांछित संख्या} = \frac{3167 + 4093}{145}$$

$$= \frac{7260}{145}$$

$$= 50 \text{ (लगभग)}$$

39. $0.\overline{3}$ और $0.\overline{4}$ का योगफल $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त करने पर होगा-

(a) $\frac{7}{9}$ (b) $\frac{8}{9}$

(c) $\frac{5}{9}$ (d) $\frac{4}{7}$

उत्तर-(a)

$$\text{हल-}0.\overline{3} = 0.333\dots\dots$$

$$0.\overline{4} = 0.444\dots\dots$$

जोड़ने पर

$$0.\bar{3} + 0.\bar{4} = 0.777$$

$$\text{या } 0.\bar{3} + 0.\bar{4} = 0.\bar{7}$$

$$\frac{p}{q} = 0.\bar{7}$$

$$\text{या } \frac{p}{q} = 0.777 \dots (i)$$

समी (i) में 10 से गुणा करने पर

$$10 \times \frac{p}{q} = 7.777 \dots (ii)$$

समी. (ii) से समी. (i) घटाने पर

$$9 \times \frac{p}{q} = 7$$

$$\therefore \frac{p}{q} = \frac{7}{9}$$

$$\text{अतः } 0.\bar{7} = \frac{7}{9}$$

40. वह छोटी से छोटी अपरिमेय संख्या क्या होगी जिससे $\sqrt{8}$ को गुणा करने पर यह परिमेय संख्या बन जाए।

- (a) 4 (b) 5
(c) 3 (d) $\sqrt{2}$

उत्तर-(d)

$$\text{हल- } \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

अतः $\sqrt{8}$ को $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर प्राप्त संख्या $= 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \times 2 = 4$ जो कि परिमेय संख्या है।

41. दो संख्याओं का योगफल 16 है यदि एक संख्या दूसरी की तिगुनी हो तो संख्याएं होंगी-

- (a) 4, 12 (b) 5, 11
(c) 2, 8 (d) 3, 13

उत्तर-(a)

हल-माना पहली संख्या = x है तब दूसरी संख्या = 3x

प्रश्नानुसार, $x + 3x = 16$

$$\text{या } 4x = 16$$

$$x = 4$$

पहली संख्या = 4 तथा दूसरी संख्या = 12 है।

42. 176 को किसी संख्या से भाग करने पर भागफल 9 और शेषफल 5 प्राप्त होता है। वह संख्या होगी-

- (a) 20 (b) 21
(c) 19 (d) 18

उत्तर-(c)

हल-माना संख्या x है जो कि भाजक है

अतः भाज्य = भाजक $\times$ भागफल + शेष

$$176 = x \times 9 + 5$$

$$176 - 5 = 9x$$

$$x = \frac{171}{9} = 19$$

43. 36 में क्या जोड़ें कि इसके अंकों के स्थान परिवर्तन से बनी संख्या प्राप्त हो जाय?

- (a) 37 (b) 35
(c) 21 (d) 27

उत्तर-(d)

हल-माना अभीष्ट संख्या = x

$$\text{तब } 36 + x = 63$$

$$x = 63 - 36 = 27$$

44. $-\frac{1}{243}$ का घातीय रूप होगा-

- (a) $\left(\frac{-1}{3}\right)^5$ (b) $\left(\frac{-1}{2}\right)^6$
(c) $\left(\frac{-1}{5}\right)^5$ (d) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$

उत्तर-(a)

हल- $\therefore 243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$$-\frac{1}{243} = -\frac{1}{(3)^5}$$

$$= \left(\frac{-1}{3}\right)^5$$

45. 0.015623 में 5 का स्थानीय मान है-

- (a) 1 (b) $\frac{1}{100}$
(c) $\frac{1}{1000}$ (d) $\frac{1}{10}$

उत्तर-(c)

हल-दी गई संख्या में अंक 5 का स्थान दशमलव के बाद तीसरा है। अतः

$$5 \text{ का स्थानीय मान } = \frac{1}{1000}$$

46. $\frac{\sqrt{0.0625}}{5}$ का सरलतम रूप है-

- (a) 0.05 (b) 0.5
(c) 0.005 (d) 5.00

उत्तर-(a)

$$\text{हल- } \frac{\sqrt{0.0625}}{5} = \frac{.25}{5}$$

$$= \frac{25}{5 \times 100}$$

$$= 0.05$$

47. $\frac{5}{6} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \div \frac{6}{7}$ का सरलतम रूप होगा—

- (a) 0.32 (b) 0.44
(c) 0.55 (d) 0.62

उत्तर—(b)

$$\text{हल—} \frac{5}{6} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \div \frac{6}{7} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{7}{6}$$

$$= \frac{2}{9} \times \left(\frac{5}{6} + \frac{7}{6} \right)$$

$$= \frac{2}{9} \times \frac{12}{6} = \frac{4}{9} = 0.44$$

48. $\sqrt[3]{216000}$ का मान होगा—

- (a) 30 (b) 40
(c) 50 (d) 60

उत्तर—(d)

$$\text{हल—} \sqrt[3]{21,6000} = \sqrt[3]{6 \times 6 \times 6 \times 10 \times 10 \times 10}$$

$$= 6 \times 10 = 60$$

49. चार अंकों की छोटी से छोटी संख्या, जो 4, 6, 8 और 10 से पूर्णतया विभाजित हो जाए, है—

- (a) 1020 (b) 1040
(c) 1080 (d) 530

उत्तर—(c)

$$\text{हल—} 4, 6, 8, 10 \text{ का ल. स.} = 120$$

$$\text{चार अंकों की सबसे छोटी संख्या} = 1000$$

$$1000 \text{ में } 120 \text{ का भाग देने पर } 40 \text{ शेष बचता है।}$$

$$\text{अतः वांछित संख्या} = 1000 + (120 - 40)$$

$$= 1000 + 80$$

$$= 1080$$

50. $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3}$ का मान होगा—

- (a) $3\sqrt{2}$ (b) $4\sqrt{5}$
(c) $5\sqrt{6}$ (d) $3\sqrt{7}$

उत्तर—(b)

$$\text{हल—} \frac{8\sqrt{3} \times 5}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

51. $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}$ का मान होगा—

- (a) 10 (b) 20
(c) 30 (d) 60

उत्तर—(d)

$$\text{हल—} 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \sqrt{5} \times \sqrt{5}$$

$$= 12 \times 5 = 60$$

52. 26 को रोमन अंक प्रणाली में लिखेंगे—

- (a) xxvi (b) vixx
(c) ixvv (d) ivxxx

उत्तर—(a)

26 को रोमन अंक प्रणाली में इस प्रकार XXVI लिखते हैं।

□ भिन्न एवं दशमलव, प्रतिशतता एवं अनुपात/समानुपात

● प्रस्तावना

संख्या पद्धति के अन्तर्गत हमने दशमलवों और परिमेय संख्याओं का विस्तृत विवरण दिए बिना उनका निर्देश मात्र किया था। इस इकाई में आप भिन्नों और दशमलवों की संकल्पनाओं और उनकी चार आधारभूत संक्रियाओं के बारे में पढ़ेंगे। इस पाठ के आरंभिक भाग में आप विभिन्न प्रकार की संख्याओं

को दिए गए विशिष्ट नामों को जानेंगे, जैसे $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{2}$, 3.4, $2\frac{1}{2}$, 8, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{2}$,

01। आप यह भी जानेंगे कि एक ही संख्या को पूर्णांक भिन्न, दशमलव मिश्र संख्या, जैसे विभिन्न रूपों में निरूपित किया जा सकता है। इस इकाई के आगे के भाग में आप प्रतिशतता की संकल्पना और भिन्न व दशमलवों को प्रतिशतता में और प्रतिशतता को विलोमतः बदलने के बारे में पढ़ेंगे।

● उद्देश्य

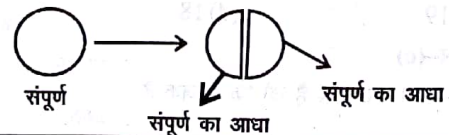
इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप :

- भिन्न, दशमलव और प्रतिशतता का अर्थ समझ सकेंगे,
- भिन्न, दशमलवों और प्रतिशतताओं के विभिन्न पक्षों से संबंधित क्रियाकलापों का आयोजन कर सकेंगे,
- भिन्न, दशमलवों और प्रतिशतताओं के अर्थ और विभिन्न पक्षों को समझने में बच्चों की सहायता कर सकेंगे,
- भिन्न, दशमलवों और प्रतिशतताओं से संबंधित दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में बच्चों की सहायता कर सकेंगे।

● भिन्न

इस इकाई का प्रयोजन क्षेत्रों और वस्तुओं के संग्रहों के साथ संबद्ध करते हुए भिन्नात्मक संख्याओं की धारणा को विकसित करना है। इसका विशिष्ट उद्देश्य बच्चों में भिन्नों के जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग से संबंधित दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने की योग्यता विकसित करना है।

संपूर्ण के भाग और वस्तुओं के समूह के भाग के रूप में भिन्न: सम्पूर्ण के भाग के रूप में भिन्न—इस स्तर पर शिक्षार्थियों को भिन्न की औपचारिक परिभाषा बताना आवश्यक नहीं है। चित्रों और आरेखों की सहायता से उदाहरण प्रस्तुत करते हुए बहुत ही अनौपचारिक ढंग से भिन्नों के अर्थ का विवेचन करना चाहिए। उदाहरण के लिए 'आधे' के बारे में भिन्नों की धारणा को समझने के लिए हम एक डिस्क को दो भागों में इस प्रकार बांटे कि दोनों भाग बराबर हों और प्रत्येक भाग को संपूर्ण डिस्क का आधा कह सकें।



क्रियाकलाप 1



एक आयताकार कागज लें। इसे अपने हाथ में पकड़ें। इसके दो सम्मुख किनारों को मिलाते हुए कागज को मोड़ें। हम देखेंगे कि तह के निशान ने इसे दो भागों में बांट दिया है।

अब उत्तर दीजिए :

क्या दोनों भाग समान आकार के हैं?

हां

क्या एक भाग ने दूसरे भाग को पूरी तरह से ढक लिया है?

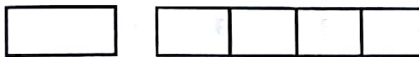
हां

अतः हम जान गए हैं कि कागज दो समान भागों में बंट गया है और प्रत्येक भाग संपूर्ण का आधा है।

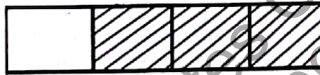
हम आधे को $1/2$ लिखते हैं और इसे 1 बटा 2 पढ़ते हैं।

एक-चौथाई तथा तीन-चौथाई ज्ञात करने की विधि :

क्रिया-कलाप 2



एक आयताकार कागज लें। इसे अपने हाथ में पकड़ें। इसके सम्मुख किनारों को मिलाकर इसे दो समान भागों में मोड़ें। अब दो समान भाग प्राप्त करने के लिए इसे फिर मोड़ें। अब कागज की तहों को खोलें। आप देखेंगे कि संपूर्ण कागज एक ही आकार के चार समान भागों में बंट गया है। इनमें से प्रत्येक भाग को हम एक चौथाई अथवा संपूर्ण का चौथाई कहते हैं। अतः हम एक चौथाई को $1/4$ लिखते हैं और इसे एक बटा चार पढ़ते हैं।

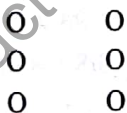


आइए, अब उपर्युक्त आकृति को देखें। इसे चार समान भागों में बांटा हुआ है। आकृति के छायांकित भागों को देखें जो संपूर्ण के चार भागों में से तीन हैं अर्थात् संपूर्ण के तीन चौथाई हैं। इसे हम $3/4$ लिखते हैं।

वस्तुओं के एक समूह के भाग के रूप में भिन्न :

क्रिया-कलाप 3

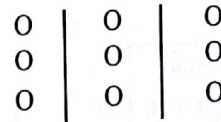
दाईं ओर दिखाई गई गेदों को गिनें। इस संग्रह को दो समान भागों में बांटने के लिए बीच में बिन्दु अंकित रेखा खींचें। प्रत्येक भाग की गेदों को गिनें। क्या प्रत्येक भाग में गेदों की संख्या समान है? हां, प्रत्येक भाग में तीन गेदें हैं।



यहां प्रत्येक भाग वस्तुओं के समूह के आधे को निरूपित करता है। अतः छह का आधा तीन है अर्थात् 6 का $1/2 = 3$

क्रिया-कलाप 4

दाईं ओर दिखाए गए संग्रह के $1/3$ को ज्ञात करने के लिए संग्रह को तीन समान भागों में बांटें और प्रत्येक भाग में गेदों की संख्या गिनें। इससे ज्ञात होता है कि 9 का $1/3$ भाग 3 होता है।



क्रिया-कलाप 5

8 गेदों के संग्रह को इस प्रकार व्यवस्थित करिए कि संग्रह 4 समान भागों में बंट जाए। एक भाग क्या निरूपित करता है?

एक भाग 8 के एक चौथाई अर्थात् 2 को निरूपित करता है।

तीन भाग किसे निरूपित करता हैं?

तीन भाग 8 के तीन चौथाई को अर्थात् 6 को निरूपित करता है।

अंश और हर : भिन्न के लिए संख्यांक में रेखा के ऊपर लिखी गई संख्या को 'अंश' कहते हैं और रेखा के नीचे लिखी गई संख्या को 'हर' कहते हैं।

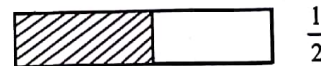
उदाहरण : $\frac{3}{8}$ भिन्न में 3 अंश है और 8 हर है। अतः किसी भिन्न का

'हर' उन समान भागों की कुल संख्या को बताता है जिनमें 'संपूर्ण' विभाजित है और 'अंश' उन समान भागों की संख्या को बताता है जिन्हें निकाल लिया गया है या प्रयुक्त किया गया है।

● भिन्नों के प्रकार

ऊपर दिए गए क्रियाकलापों से भिन्नों के बारे में कुछ अन्य महत्वपूर्ण सामान्यीकरण उभर कर आते हैं। इनमें से कुछ का विवेचन नीचे किया गया है।

(क) तुल्य भिन्न :



कागज की चार समान पट्टियां लें और उन्हें आकृति में दिखाए गए रूप में मोड़ें। उपर्युक्त से यह स्पष्ट है कि :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

'अंश' तथा 'हर' के परीक्षण द्वारा तुल्यता के गुणधर्म का पता लगाया जा सकता है, भिन्न $1/2$ को लें। अब इसके अंश और हर को 2 से गुणा करें। हमें प्राप्त होता है :

$$1 \times 2 = 2$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

हमें $1/2$ के अंश और हर को किसी संख्या से गुणा करना चाहिए जिससे हमें $4/8$ प्राप्त हो सके।

यहां हम दोनों को उसे गुणा करेंगे।

(ख) दी हुई भिन्न को उसके लघुतम रूप में लाना-आइए, हम नीचे दी गई सारणी का अध्ययन करें और पता करें कि कौन-सी भिन्न लघुतम रूप में है?

उदाहरण :

भिन्न	अंश के गुणनखंड	हर के गुणनखंड	सार्व गुणनखंड	क्या भिन्न लघुतम रूप में हैं या नहीं
8/10	1, 2, 4, 8	1, 2, 5, 10	1, 2	नहीं
6/7	1, 2, 3, 6	1	1	हां
2/4	1, 2	1, 2, 4	1, 2	नहीं
2/3	1, 2	1, 3	1	हां

उपर्युक्त उदाहरण से हमें पता चलता है कि 6/7 और 2/3 लघुतम रूप में हैं। इसलिए कह सकते हैं कि कोई भिन्न लघुतम रूप में तब होती है जब अंश और हर का एकमात्र सार्वगुणनखंड एक हो।

(ग) उचित और अनुचित भिन्न

उदाहरण :

3/5 7/11 11/14 19/23

(i) $5 > 3$ (ii) $11 > 7$ (iii) $14 > 11$ (iv) $23 > 19$

हमने देखा कि इन सभी भिन्नों में 'अंश' से 'हर' बड़ा है। ऐसी भिन्नों को हम उचित भिन्न कहते हैं।

उदाहरण :

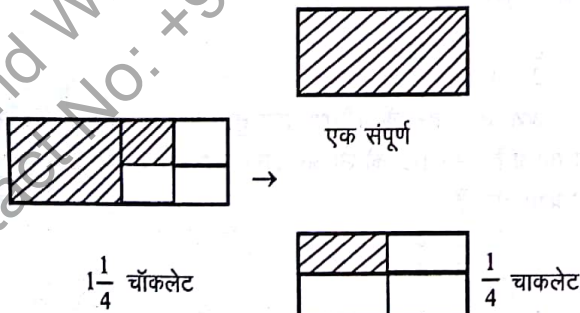
8/6, 3/3, 5/2, 7/4, 10/9, 8/8

 $8 > 6$ $3 = 3$ $5 > 2$ $7 > 4$ $10 > 9$ $8 = 8$

इस स्थिति में हमने देखा कि 'अंश' 'हर' के बराबर है अथवा उससे बड़ा है, ऐसी भिन्नों को हम अनुचित भिन्न कहते हैं।

(घ) मिश्र भिन्न :

नीचे दिए गए आकृति का परीक्षा करते हुए छायांकित भागों पर ध्यान दीजिए-



यह भिन्न एक संपूर्ण चॉकलेट और संपूर्ण के एक भाग से बनी है। इसलिए इसे मिश्र भिन्न कहते हैं।

मिश्र भिन्न एक संपूर्ण संख्या और भिन्नात्मक संख्या का योग होती है। अतः मिश्र भिन्न

$$1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$$

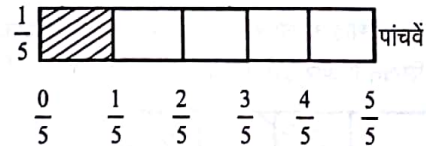
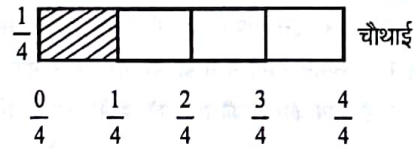
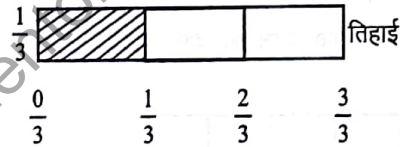
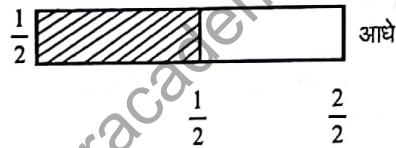
$$= \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4} \text{ अनुचित भिन्न}$$

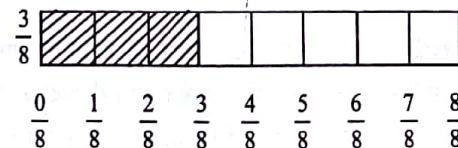
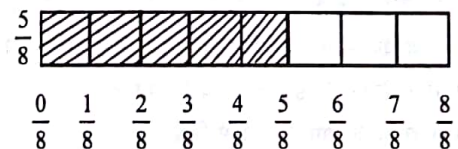
इस रूप में लिखे जाने पर मिश्र भिन्न को अनुचित भिन्न कहते हैं।

● भिन्नों का क्रमीकरण

(क) भिन्नात्मक संख्याओं का क्रमीकरण :



(ख) 'हर' के समान होने पर भिन्नों का क्रमीकरण :



आइए, हम समान लंबाई वाली इन दो पट्टियों को लेते हैं। जिसमें पहली पट्टी का 5/8 भाग छायांकित हो और दूसरी पट्टी का 3/8 भाग छायांकित हो।

$$\text{क्या } 5/8 > 3/8 ?$$

हां, क्योंकि 5/8 वाला छायांकित भाग 3/8 के छायांकित भाग से बड़ा है। इस उदाहरण में 'हर' समान है और $5 > 3$

● भिन्नों की चार आधारभूत संक्रियाएं

आइये, अब हम भिन्नात्मक संख्याओं से संबंधित चार आधारभूत संक्रियाओं पर विचार करें।

समान हर वाली भिन्न का जोड़ :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4}$$

असमान हर वाली भिन्न को जोड़ना :

$1/3$ की तुल्य भिन्न को लिखें :

$$\frac{1 \times 2}{3 \times 2}, \frac{1 \times 3}{3 \times 3}, \frac{1 \times 4}{3 \times 4}$$

इसी तरह $1/5$ की तुल्य भिन्न को लिखें :

$$\frac{1 \times 1}{5 \times 1}, \frac{1 \times 2}{5 \times 2}, \frac{1 \times 3}{5 \times 3}, \frac{1 \times 4}{5 \times 4}$$

अर्थात् $\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \frac{4}{20}$ इत्यादि।

अब $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{5}$ को जोड़ने के लिए समान हर वाली तुल्य भिन्न ज्ञात करते हैं।

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \frac{4}{20}, \frac{5}{25}$$

हम देखते हैं कि इस उदाहरण में समान हर 15 है।

$$\begin{aligned} \text{अतः } \frac{1}{3} + \frac{1}{5} &= \frac{5}{15} + \frac{3}{15} \\ &= \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

इससे यह जानकारी मिलती है कि हमें सर्वप्रथम भिन्न के हर को बदलना चाहिए ताकि उनकी तुल्य भिन्न समान हर वाली हो जाएं। यह तभी संभव है जब हम दी गई भिन्न के 'हरों' का लघुत्तम समापवर्त्य निकालें। भिन्न को सदृश्य भिन्न में बदलने के बाद हम उन्हें आसानी से जोड़ सकते हैं।

अलग-अलग हरों वाली भिन्न को घटाना :

आइए, हम $\frac{2}{5}$ में से $\frac{1}{3}$ को घटाएं। इस उदाहरण में दोनों भिन्न

असमान हैं, इसलिए हम उनको सदृश्य भिन्न में बदलते हैं। 3 और 5 का

लघुत्तम समापवर्त्य 15 है। इसलिए हम $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}$ को $\frac{6}{15} - \frac{5}{15}$ बना लेते हैं।

$$\text{अतः } \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

इसी प्रकार हम ऐसे और प्रश्नों को भी हल कर सकते हैं।

समान 'हर' वाली भिन्न को घटाना :

मान लीजिए कि हमें $4/8$ में से $2/8$ को घटाना है। इसमें हर आठ है।

$$\frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{2}{8}$$

अतः दो सदृश्य भिन्न को घटाने के लिए, उसके हर को समान रखते हुए उनके अंशों को घटाया जाता है।

भिन्नात्मक संख्या को पूर्णांकों से गुणा करना :

आइए, हम सर्वप्रथम पूर्णांकों को पूर्णांकों से गुणन करके देखते हैं।

$$4 \times 3 = 4 + 4 + 4 = 12$$

इसी तरह हम भिन्नात्मक संख्या को पूर्णांकों से गुणा कर सकते हैं—

$$\frac{1}{5} \times 4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

ऐसे प्रश्नों में हम अंश को पूर्णांकों से गुणा करते हैं किंतु हर को वैसा ही रखते हैं।

भिन्नात्मक संख्या को पूर्णांकों से भाग देना—भिन्नात्मक संख्या को पूर्णांक से भाग देने को समझने के लिए हमें प्रतिलोम अध्ययन की जानकारी की आवश्यकता होती है, जैसे कि 2 आधे एक संपूर्ण, 3 तिहाई एक संपूर्ण, तथा 4 चौथाई एक संपूर्ण का निर्माण करते हैं—

$$\text{इसी प्रकार } \frac{1}{3} \div 4$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

जब दो संख्याओं का गुणनफल एक हो तो संख्याओं को एक-दूसरे का प्रतिलोम कहते हैं।

$$\frac{1}{2} \times 2 = 1, \frac{1}{3} \times 3 = 1, \frac{1}{4} \times 4 = 1 \text{ इत्यादि।}$$

भिन्नात्मक संख्या को भिन्नात्मक संख्या से भाग देना—हम जानते हैं कि विभाजन को गुणज में बदला जा सकता है और इसके लिए उस संख्या के प्रतिलोम को लेना होता है जिसके द्वारा हम प्रथम संख्या को विभाजित करना चाहते हैं। यही प्रक्रिया तब लागू होती है जब हम किसी भिन्नात्मक संख्या को दूसरी भिन्नात्मक संख्या से भाग देते हैं।

उदाहरण— $6/9$ को $5/6$ से भाग दें।

हम इसे इस रूप में लिख सकते हैं : $6/9 \div 5/6$

$$\text{अतः } \frac{6}{9} \times \frac{6}{5} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$$

● दशमलव

पूर्व में हम संख्यांक में अंकों के स्थान-मान के बारे में पढ़ चुके हैं। याद रखें कि जैसे-जैसे हम दाईं ओर से बाईं ओर जाते हैं, वैसे-वैसे संख्यांक में अंकों का स्थान-मान दस गुना बढ़ जाता है।

दशमलव और दशमलव में अंक का स्थान मान

संख्या 77777 में विभिन्न अंकों का स्थान-मान ध्यान से देखें:

7	7	7	7	7
↓	↓	↓	↓	↓
10000	1000	100	10	1

अब बताइए कि 1000, 10000 का कौन सा भाग है?

यह है $1000/10000 = 1/10$

100, 1000 का कौन-सा भाग है?

यह है $100/1000 = 1/10$

10, 100 का कौन-सा भाग है?

यह है $10/100 = 1/10$

हम भिन्नात्मक संख्याओं जैसे $\frac{1}{100}, \frac{1}{10}$ इत्यादि को एक चिह्न '.' द्वारा

लिख सकते हैं, जिसे दशमलव कहते हैं। उदाहरणस्वरूप $\frac{1}{100}$ को हम .01

तथा $\frac{1}{10}$ को हम .1 लिख सकते हैं।

हम एक संख्या 11111.1111 पर गौर करते हैं। इस संख्या को हम ग्यारह हजार एक सौ ग्यारह दशमलव एक, एक, एक, एक पढ़ते हैं अर्थात् दशमलव से बाईं ओर की संख्या को सामान्य रूप से पढ़ते हैं और दशमलव से दाईं ओर की संख्याओं को एक के बाद एक के क्रम में पढ़ते हैं। दाईं ओर का पहला अंक दसवें भाग को, उससे दाईं ओर का दूसरा अंक सौवें भाग को और तीसरा अंक हजारवें भाग को निरूपित करता है तथा चौथा अंक दस हजारवें भाग को निरूपित करता है और इसी प्रकार आगे भी—

$$10000 + 1000 + 100 + 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + 1/10000$$

यदि हम 4000.001 संख्या को लें तो इसका मान होगा $4000 + 1/1000$ क्योंकि 1 से पहले अन्य सभी अंक शून्य हैं।

दशमलव भिन्नों को कैसे पढ़ें और लिखें— अब हम नीचे लिखी गई सारणी का अध्ययन करते हैं—

सार्वभूमि भिन्न	दशमलव भिन्न	इस रूप में पढ़ते हैं
6/10	0.6	शून्य दशमलव छः
43/100	0.43	शून्य दशमलव चार, तीन
79762/10000	7.9762	सात दशमलव नौ, सात, छः, दो

तुल्य दशमलव

क्या 30/100 तथा 3/10 तुल्य भिन्न हैं?

हां

$$\text{इसलिए } 30/100 = 3/10$$

$$\text{अतः } 0.30 = 0.3$$

तुल्य भिन्न का प्रयोग करके हम सत्यापित कर सकते हैं कि

$$0.3 = 0.300$$

इससे हमें क्या निष्कर्ष प्राप्त होता है?

हमें पता चलता है कि दाईं ओर के अंतिम अंक (शून्य के अतिरिक्त) के बाद एक, दो या तीन शून्यों को दशमलव संख्या में जोड़ने से भिन्नात्मक संख्याओं का मान नहीं बदलता है।

$$\text{इसी प्रकार } 0.10 = 0.1$$

$$0.20 = 0.2$$

$$0.30 = 0.3$$

$$0.40 = 0.4$$

$$0.80 = 0.8$$

● दशमलवों की चार आधारभूत संक्रियाएं

(क) दशमलवों को जोड़ना :

आइए, हम दो या तीन दशमलवों को जोड़ना सीखें—

विस्तारित रूप	लघुरूप
0.4 → 4 दसवां भाग	0.4
0.2 → 2 दसवां भाग	0.2
0.6 → 6 दसवां भाग	अथवा 0.6

अतः 0.4 और 0.2 का योग 0.6 है।

आइए, अब हम 1.13, 2.31 और 3.41 को जोड़ें—

विस्तारित रूप	लघुरूप
1.13 = एक इकाइयां + एक दसवां भाग + तीन सौवां भाग	1.13
2.31 = दो इकाइयां + तीन दसवां भाग + एक सौवां भाग	2.31
3.41 = तीन इकाइयां + चार दसवां भाग + एक सौवां भाग	3.41
6 इकाइयां + 8 दसवां भाग + 5 सौवां भाग	6.85

अतः योग 6.85 होगा।

उदाहरण : 3.325, 4.872 और 2.031 को जोड़ें—

$$3.325$$

$$+ 4.872$$

$$+ 2.031$$

$$10.228$$

(ख) दशमलवों को घटाना : आइए अब हम एक दशमलव संख्या को दूसरी दशमलव संख्या में से घटाना सीखें—

विस्तारित रूप	लघुरूप
0.8 → 8 दसवां भाग	0.8
0.2 → 2 दसवां भाग	-0.2
6 दसवां भाग	अथवा 0.6

इसलिए अंतर 0.6 है।

इसी प्रकार हम अन्य उदाहरणों से समझ सकते हैं—

(क) 8.763	(ख) 1.7
-7.542	-0.8
1.221	0.9

इससे हमें ज्ञात होता है कि दो दशमलवों के बीच अंतर ज्ञात करने के लिए एक महत्वपूर्ण बात यह है कि हमें परिणाम में दशमलव बिंदु दिए गए दशमलवों के दशमलव बिंदुओं के ठीक नीचे रखना चाहिए।

(ग) दशमलवों का गुणन : 0.1 को 3 से गुणा करें। हम जानते हैं कि एक दसवां भाग $\times 3 = 3$ दसवें भाग $= 0.3$

$$\text{इसी प्रकार, } \frac{1}{10} \times 3 = \frac{1 \times 3}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

इससे हमें यह जानकारी मिलती है चूंकि 0.1 में एक दशमलव स्थान है, इसलिए गुणनफल में एक ही दशमलव स्थान होना चाहिए।

उदाहरण : 3.65 को 2 से गुणा करें।

$$3.65$$

$$\times 2$$

$$7.30$$

इससे भी हमें यह जानकारी मिलती है कि 3.65 में दो दशमलव स्थान हैं इसलिए इसके गुणनफल में भी दो दशमलव स्थान होंगे।

दशमलव का दशमलव से गुणन

$$\text{उदाहरण : } 0.3 \times 0.4 = \frac{3}{10} \times \frac{4}{10}$$

$$= \frac{12}{100} = 0.12$$

उदाहरण :

$$5.24 \times 1.3 = \frac{524}{100} \times \frac{13}{10}$$

$$524/100 \times 13/10$$

$$\frac{524 \times 13}{1000} = \frac{6812}{1000} = 6.812$$

(घ) दशमलव को भाग देना—हम दशमलव की स्थिति में भी उसी प्रकार भाग देते हैं जैसे हम पूर्णांकों को भाग देते हैं।

उदाहरण : $0.8 \div 2$

$$\begin{array}{r} 0.4 \\ 2 \overline{)0.8} \\ \underline{0} \\ 8 \\ \underline{8} \\ 0 \end{array}$$

इस प्रकार $0.8 \div 2 = 0.4$

उदाहरण : $0.32 \div 8$

$$\begin{array}{r} 0.04 \\ 8 \overline{)0.32} \\ \underline{0} \\ 3 \\ \underline{0} \\ 32 \\ \underline{32} \\ 0 \end{array}$$

इस प्रकार $0.32 \div 8 = 0.04$

इन उदाहरणों में आपने क्या देखा?

हम विभाजन उसी प्रकार करते हैं जैसे हम पूर्णांकों का विभाजन कर रहे हैं या हम पहले भाज्य के पूर्णांकों वाले भाग में भाग को विभाजित करते हैं। उसके पश्चात हम इकाई वाले स्थान की दाईं ओर भागफल में दशमलव बिन्दु लगा देते हैं और फिर भाज्य के दशमलव संख्या वाले भाग को विभाजित करते हैं।

उदाहरण : 750 को 16 से तीन दशमलव स्थानों तक विभाजित कीजिए।

$$\begin{array}{r} 46.875 \\ 16 \overline{)750} \\ \underline{64} \\ 110 \\ \underline{96} \\ 140 \\ \underline{128} \\ 120 \\ \underline{112} \\ 80 \\ \underline{80} \\ 0 \end{array}$$

अभीष्ट भागफल = 46.875

अतः हम इस तरह के प्रश्नों का उत्तर देने के लिए भाज्य के दाईं ओर उतने शून्य लगाते जाते हैं जितने अंतिम शेष को शून्य लाने के लिए आवश्यक होते हैं।

उदाहरण : 17.28 को 0.48 से भाग दीजिए।

$$17.28 \div 0.48 = \frac{17.28 \times 100}{0.48 \times 100} \text{ (विभाजन को पूर्णांक में बदले)}$$

$$= \frac{1728}{48}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 48 \overline{)1728} \\ \underline{144} \\ 288 \\ \underline{288} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{अतः } 17.28 \div 0.48 = 36$$

यहां हम दशमलव को दशमलव से भाग दे रहे हैं। इसके लिए हम भाजक में दशमलवों की संख्या देखते हुए भाज्य और भाजक को 10 या 100 या 1000 इत्यादि से गुणा करके पूर्णांकों में बदल लेते हैं और फिर हम नए भाज्य को पूर्णांक भाजक से भाग देते हैं।

● दशमलवों का निकटन

नीचे दी गई संख्याओं 42, 48, 53, 57, 108, 123 में 42, 50 की अपेक्षा 40 के निकट है। अतः हम इसका निकटन 40 करते हैं। 48, 40 की अपेक्षा 50 के निकट है अतः हम इसका निकटन 50 करते हैं। 53, 60 की अपेक्षा 50 के निकट है अतः हम इसका निकटन 50 करते हैं।

इससे हमें जानकारी मिलती है कि जब हम दी हुई किसी संख्या का निकटतम 10 तक निकटन करते हैं, तो हम दस के उस गुणज तक करते हैं जो उसके निकटतम होता है।

उदाहरण :

11, 13, 14, 16, 17, 18, 19

11, 20 की अपेक्षा 10 के अधिक निकट है अतः इसका निकटन 10 करते हैं।

13, 20 की अपेक्षा 10 के अधिक निकट है अतः इसका निकटन 10 करते हैं।

14, 20 की अपेक्षा 10 के अधिक निकट है, अतः इसका निकटन 10 करते हैं।

16, 10 की अपेक्षा 20 के अधिक निकट है, अतः इसका निकटन 20 करते हैं।

उदाहरण :

2.2, 2.3, 2.6, 2.8 में

2.2, 3 की अपेक्षा 2 के अधिक निकट है, अतः इसका निकटन 2 करते हैं।

2.3, 3 की अपेक्षा 2 के अधिक निकट है, अतः इसका निकटन हम 2 करते हैं।

2.6, 2 की अपेक्षा 3 के अधिक निकट है, अतः इसका निकटन हम 3 करते हैं।

2.8, 2 की अपेक्षा 3 के अधिक निकट है, अतः इसका निकटन हम 3 करते हैं।

उदाहरण : 123, 174, 6680, 7220

123, 200 की अपेक्षा 100 के निकट है इसलिए हम इसका निकटन 100 करते हैं।

174, 100 की अपेक्षा 200 के निकट है इसलिए हम इसका निकटन 200 करते हैं।

6680, 6600 की अपेक्षा, 6700 के निकट है, इसलिए हम इसका निकटन 6700 करते हैं। 7220, 7300 की अपेक्षा 7200 के निकट है इसलिए हम इसका निकटन 7200 करते हैं।

इनसे हमें ज्ञात होता है कि जब किसी संख्या का निकटन निकटतम सौ तक करते हैं, तब हम उसके निकटतम सौ के गुणज तक निकटन करते हैं।

● प्रतिशतता

प्रतिशतता गणित में किसी संख्या, परिमाण (मात्रा) आदि को व्यक्त करने का एक तरीका है। प्रतिशत का अर्थ है, प्रति सौवा या प्रति सैकड़ा। एक सौवा को हम $\frac{1}{100}$ या 1 प्रतिशत कहते हैं। प्रतिशत को चिह्न '%' से प्रदर्शित करते हैं।

नोट : $\frac{1}{100}$ को प्रतिशत के चिह्न (%) के रूप में लिखा जाता है। प्रतिशत से अर्थ है 100 में से कितना। इसको भिन्न के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है—

35 प्रतिशत का अर्थ $\frac{35}{100}$ है।

$$60 \text{ प्रतिशत} = \frac{60}{100} = 60 \times \frac{1}{100}$$

$$30 \text{ प्रतिशत} = \frac{30}{100} = 30 \times \frac{1}{100}$$

प्रतिशत के स्थान पर इसके संकेत % का भी प्रयोग किया जाता है।

12% = 12 प्रतिशत

साधारण भिन्न को प्रतिशत में बदलना— भिन्न को प्रतिशत में परिवर्तित करने के लिए दी हुई भिन्न को 100 से गुणा कर देते हैं।

$$\text{जैसे } \frac{4}{5} \times 100 = 80$$

$$\text{या } \frac{4}{5} \text{ का प्रतिशत मान} = 80\%$$

दशमलव संख्या को प्रतिशत में बदलना

साधारण भिन्न की तरह दशमलव भिन्न को भी हम प्रतिशत में बदल सकते हैं—

$$\text{जैसे } .3 = (.3 \times 100)\% = 30\%$$

$$.27 = (.27 \times 100)\% = 27\%$$

प्रतिशत को दशमलव में बदलना

$$75\% = 75 \times \frac{1}{100} = \frac{75}{100} = 0.75$$

$$40.5 = 40.5 \times \frac{1}{100} = \frac{405}{10 \times 100} = 0.405$$

इससे हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि प्रतिशत को दशमलव में बदलने के लिए हम दशमलव बिंदु को बाईं ओर दो स्थान आगे स्थानान्तरित कर देते हैं और % चिह्न को हटा देते हैं।

दी गई राशि की प्रतिशतता ज्ञात करना

उदाहरण : 600 रु. का 40% ज्ञात करें।

$$600 \text{ रु. का } 40\% = 40 \times \frac{1}{100} \times 600 \text{ रु.}$$

$$= \frac{40 \times 1 \times 600}{100}$$

$$= \frac{24000}{100}$$

$$= 240 \text{ रु.}$$

उदाहरण : 2 किलोग्राम का 12.5 प्रतिशत कितना होता है?

$$2 \text{ किग्रा} = 2000 \text{ ग्राम}$$

$$2000 \text{ ग्राम का } 12.5\% = 2000 \times \frac{12.5}{100} \text{ ग्राम}$$

$$= 20 \times 12.5 \text{ ग्राम}$$

$$= 250 \text{ ग्राम}$$

एक राशि को दूसरी राशि के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करना

उदाहरण : 80 रु. को 175 रु. के प्रतिशत के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\text{अपेक्षित प्रतिशत} = \frac{80}{175} \times 100 = \frac{8000}{175} = 45\frac{5}{7}\%$$

उदाहरण : 2 मिनट 24 सेकंड को एक घंटे के प्रतिशत के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\text{एक घंटा} = 60 \text{ मिनट} = 60 \times 60 \text{ सेकंड} = 3600 \text{ सेकंड}$$

$$2 \text{ मिनट } 24 \text{ सेकंड} = (2 \times 60 + 24 \text{ सेकंड})$$

$$= (120 + 24 \text{ सेकंड})$$

$$= 144 \text{ सेकंड}$$

$$\therefore \text{अपेक्षित प्रतिशत} = \frac{144}{3600} \times 100 = \frac{14400}{3600}$$

$$= 4\%$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि दी गई राशि को दूसरी राशि के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करने के लिए भाग देते हैं और भागफल को 100 से गुणा करते हैं।

यदि प्रतिशत दिया हुआ हो, तो राशि ज्ञात करना

किसी राशि का 5%, 30 है तो वह राशि ज्ञात कीजिए।

$$\text{राशि का } 5\% = 30$$

$$\text{राशि} = \frac{30}{5\%} = \frac{30}{5 \times \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{30 \times 100}{5} = 600$$

इस प्रकार हमें पता चलता है कि यदि किसी राशि का प्रतिशत दिया गया हो और वह राशि मालूम करनी हो, तो हम ज्ञात राशि को दिए गए प्रतिशत की तुल्य भिन्न से भाग दे देते हैं।

● लाभ-हानि

खरीद-फरोख्त हमारे दैनिक जीवन की सामान्य प्रक्रिया है। जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है वह उसका 'क्रय मूल्य' (Cost Price) कहलाता है। जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है वह उसका विक्रय मूल्य (Selling Price) कहलाता है।

नोट : यह स्पष्ट है कि किसी वस्तु का क्रय मूल्य विक्रय मूल्य से कम हो तो वस्तु के बेचने में लाभ होता है।

$$\text{लाभ} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य}$$

यदि वस्तु का विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से कम होता है तो वस्तु के बेचने में हानि होती है।

$$\text{हानि} = \text{क्रय मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य}$$

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \frac{\text{शुद्ध लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$$

$$\text{हानि प्रतिशत} = \frac{\text{शुद्ध हानि} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}$$

नोट-(i) यदि x वस्तुओं का क्रय मूल्य, y वस्तुओं के विक्रय मूल्य के समान हो,

$$\text{जहां } x > y \text{ तो लाभ का \%} = \frac{x - y}{y} \times 100$$

(ii) यदि x वस्तुओं का क्रय मूल्य y वस्तुओं के विक्रय मूल्य के समान हो, जहां $x < y$

$$\text{तो हानि का \%} = \frac{y - x}{y} \times 100$$

● बट्टा (Discount)

दुकानदार ग्राहकों को आकर्षित करने के लिए बेची जाने वाली वस्तुओं के मूल्य पर कुछ छूट देते हैं। इस छूट को बट्टा कहते हैं। वस्तु पर छपा हुआ मूल्य वस्तु का अंकित मूल्य कहलाता है। किसी वस्तु के अंकित मूल्य में से बट्टे की राशि निकालने पर जितनी धनराशि दुकानदार को मिलती है वह धनराशि उस वस्तु का विक्रय मूल्य कहलाती है।

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} - \text{बट्टा}$$

● साधारण ब्याज

प्रायः यह देखने में आता है कि किसी भी व्यक्ति के व्यावहारिक जीवन में उधार के लेन-देन के बिना कार्य करना बहुत कठिन होता है। उधार के लेन-देन की प्रक्रिया बैंकों, सहकारी समितियों या किसी व्यक्ति द्वारा की जाती है।

जितनी धनराशि उधार ली जाती है, वह मूलधन कहलाता है।

किसी के धन को प्रयोग करने के लिए जो अतिरिक्त राशि चुकाई जाती है, वह ब्याज कहलाती है।

100 रु. पर 1 वर्ष के लिए जो ब्याज दिया जाता है वह ब्याज की प्रतिशत वार्षिक दर कहलाती है। मूलधन और ब्याज के योग को मिश्रधन कहते हैं।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$$

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{ब्याज}$$

● अनुपात तथा समानुपात

प्रायः प्रतिशत, लाभ और हानि, काम और समय, समय और दूरी आदि से सम्बन्धित दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में अनुपात और समानुपात की संकल्पनाओं का प्रयोग किया जाता है।

जब दो राशियाँ एक ही श्रेणी की होती हैं तो वह सम्बन्ध जो यह बताता है कि एक राशि दूसरी राशि की कितनी गुनी या कौन सा भाग है, अनुपात कहलाता है। अनुपात की दो राशियों में पहली राशि को पूर्व पद (antecedent) एवं दूसरी राशि को उत्तर पद (consequent) कहते हैं। जब दो राशियाँ a और b सजातीय हों तथा $b \neq 0$ तो उनके अनुपात को $a : b$ या $\frac{a}{b}$

द्वारा प्रकट किया जाता है। ध्यातव्य हो कि $\frac{a}{b}$ केवल भिन्नात्मक संख्या है इसकी कोई इकाई नहीं है।

- किसी अनुपात की दोनों राशियों को एक ही संख्या से गुणा या भाग करने पर अनुपात में परिवर्तन नहीं होता है।
- दो अनुपातों के हरों को समान करके उनकी तुलना की जा सकती है। समान हर होने पर बड़े अंश वाला अनुपात छोटे अंश वाले अनुपात से बड़ा होता है।
- यदि पहली और दूसरी राशि का अनुपात तीसरी और चौथी राशि के अनुपात के बराबर हों तो ऐसी चार राशियाँ समानुपाती कहलाती हैं।
- समानुपात में प्रथम और चतुर्थ राशि का गुणनफल, द्वितीय और तृतीय राशि के गुणनफल के बराबर होता है।
- यदि तीन राशियाँ इस प्रकार की हों कि उनमें प्रथम और द्वितीय राशि का अनुपात, द्वितीय और तृतीय राशि के अनुपात के बराबर हो तो यहाँ पर प्रथम और तृतीय राशि का गुणनफल द्वितीय राशि के वर्ग के बराबर होता है।

अनुपात के प्रकार

(i) विलोमानुपात—यदि एक अनुपात की पूर्व राशि तथा उत्तर राशि दूसरे अनुपात की क्रमशः उत्तर राशि तथा पूर्व राशि हो तो दूसरा अनुपात प्रथम अनुपात का विलोमानुपात कहलाता है। विलोमानुपात को व्युत्क्रमानुपात भी कहते हैं। जैसे $3 : 5$ का व्युत्क्रमानुपात $5 : 3$ है।

(ii) वर्गानुपात—दो सम अनुपातों को परस्पर गुणा करने से प्राप्त अथवा दो सम अनुपातों का संयोजित अनुपात वर्गानुपात होता है। जैसे— $a : b$ का वर्गानुपात $a^2 : b^2$ अथवा $\frac{a^2}{b^2}$ है।

(iii) वर्गमूलानुपात—किसी भी अनुपात के वर्गमूलों में जो अनुपात होता है उसे वर्गमूलानुपात कहते हैं।

$$\text{जैसे } x : y \text{ का वर्ग मूलानुपात } \sqrt{x} : \sqrt{y} \text{ है।}$$

(iv) मिश्र अनुपात—जिस अनुपात का पूर्व पद दो या दो से अधिक अनुपातों के पूर्व पदों का गुणनफल तथा उत्तर पद दिए हुए अनुपातों के

उत्तर पदों का गुणनफल हो तो वह अनुपात दिए गए अनुपातों का मिश्र अनुपात कहलाता है। जैसे- $5 : 7, 7 : 8, 4 : 5$ का मिश्र अनुपात $5 \times 7 \times 4 : 7 \times 8 \times 5$ अर्थात् $140 : 280$ या $1 : 2$ है।

समानुपात के नियम

यदि $a : b :: c : d$ हो तो-

- (1) $b : a :: d : c$ (प्रतिलोमानुपात का नियम)
- (2) $a : c :: b : d$ (एकान्तर अनुपात का नियम)
- (3) $(a + b) : b :: (c + d) : d$ (योगानुपात का नियम)
- (4) $(a - b) : b :: (c - d) : d$ (अन्तरानुपात का नियम)
- (5) $(a + b) : (a - b) :: (c + d) : (c - d)$ (योगान्तरानुपात का नियम)

अनुपातों का संयोजन

(1) **संयोजित अनुपात**-दो या अधिक अनुपातों के संगत पदों को गुणा करने पर जो अनुपात प्राप्त होता है उसे इन अनुपातों का संयोजित अनुपात कहा जाता है। जैसे-अनुपातों $a : b, c : d$ तथा $e : f$ का संयोजित अनुपात $ace : bdf$ है।

(2) **घनानुपात**-यह तीन समान अनुपातों का संयोजित अनुपात होता है।

जैसे- $a : b$ का घनानुपात $a^3 : b^3$ या $\frac{a^3}{b^3}$ है।

(3) **घनमूलानुपात**-किसी भी अनुपात $a : b$ का घनमूलानुपात $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$ होता है।

जैसे- $64 : 125$ का घनमूलानुपात $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{125}$ अर्थात् $4 : 5$ है।

(4) **व्युत्क्रमानुपात**-अनुपात $a : b$, (जहाँ $a, b \neq 0$) के लिए अनुपात $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ को, जो कि $b : a$ है, व्युत्क्रमानुपात कहा जाता है।

● **चाल-समय**

किसी वस्तु द्वारा इकाई समय में तय की गयी कुल दूरी, वस्तु की चाल होती है, अतः

$$(i) \text{ चाल} = \frac{\text{कुल तय की गयी दूरी}}{\text{कुल समय}}$$

$$(ii) \text{ कुल तय की गयी दूरी} = \text{चाल} \times \text{कुल समय}$$

$$(iii) \text{ कुल समय} = \frac{\text{कुल तय की गयी दूरी}}{\text{चाल}}$$

अभ्यास प्रश्न

प्रश्न 1. भिन्न $4/7$ का अंश लिखिए।

उत्तर : अंश चार है।

प्रश्न 2. निम्नलिखित में किसका हर 6 है?

$1/2, 3/6, 6/7, 7/8$

उत्तर : $3/6$ का हर छः है।

प्रश्न 3. $2/3$ से तुल्य भिन्न $6/9$ प्राप्त करने के लिए किस संख्या से गुणा करना चाहिए?

उत्तर : $\frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9}$ अतः उसे 3 से गुणा करना चाहिए।

प्रश्न 4. निम्नलिखित में कौन सी संख्या भिन्न है?

$2/3, 6/11, 11/9, 22/8, 20/23$

उत्तर : उचित भिन्ने हैं- $2/3, 6/11, 20/23$

प्रश्न 5. निम्नलिखित में कौन सी सदृश्य तथा असदृश्य भिन्न हैं?

(क) $1/8, 3/8, 4/8$ और $1/8$

(ख) $1/4, 2/5, 8/9$ और $8/10$

उत्तर : सदृश्य भिन्ने हैं- $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{1}{8}$

असदृश्य भिन्ने हैं- $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{8}{9}, \frac{8}{10}$

प्रश्न 6. $\frac{18}{12}$ को मिश्र भिन्न में बदलिए।

उत्तर : $18/12$ को मिश्र भिन्न में $= 1\frac{6}{12} = 1\frac{1}{2}$

प्रश्न 7. $5\frac{2}{8}$ को अनुचित भिन्न में बदलिए।

उत्तर : $5\frac{2}{8}$ को अनुचित भिन्न में बदलने पर $\frac{42}{8}$ प्राप्त होता है।

प्रश्न 8. निम्नलिखित भिन्नात्मक संख्याओं को घटते हुए क्रम में रखिए।
 $2/8, 4/8, 3/8, 7/8, 1/8$

उत्तर : भिन्नात्मक संख्याओं को घटते हुए क्रम में रखने पर-
 $7/8 > 4/8 > 3/8 > 2/8 > 1/8$

प्रश्न 9. निम्नलिखित भिन्नात्मक संख्याओं को बढ़ते हुए क्रम में लिखिए।

$4/5, 4/7, 4/9, \frac{4}{8}$

उत्तर : $\frac{4}{9} < \frac{4}{8} < \frac{4}{7} < \frac{4}{5}$

प्रश्न 10. भिन्न $3/12$ और $4/12$ को जोड़ें।

उत्तर : $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$

प्रश्न 11. $8/18 + 2/18$ को हल करें।

उत्तर : $\frac{8}{18} + \frac{2}{18} = \frac{10}{18}$

प्रश्न 12. $4/7$ और $3/15$ को जोड़िए।

उत्तर : $4/7 + 3/15 = \frac{4 \times 15}{7 \times 15} + \frac{3 \times 7}{15 \times 7}$

$= \frac{60}{105} + \frac{21}{105}$

$= \frac{81}{105}$

प्रश्न 13. $\frac{4}{5}$ और $\frac{5}{7}$ को जोड़िए।

$$\begin{aligned}\text{उत्तर : } \frac{4}{5} + \frac{5}{7} &= \frac{4 \times 7}{5 \times 7} + \frac{5 \times 5}{7 \times 5} \\ &= \frac{28}{35} + \frac{25}{35} = \frac{53}{35}\end{aligned}$$

प्रश्न 14. $\frac{8}{9}$ में से $\frac{1}{6}$ को घटाएं।

$$\begin{aligned}\text{उत्तर : } \frac{8}{9} - \frac{1}{6} &= \frac{8 \times 6}{9 \times 6} - \frac{1 \times 9}{6 \times 9} \\ &= \frac{48}{54} - \frac{9}{54} \\ &= \frac{39}{54} = \frac{13}{18}\end{aligned}$$

प्रश्न 15. $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{7}$ का योगफल ज्ञात करें।

$$\begin{aligned}\text{उत्तर : } \frac{1}{4} + \frac{1}{7} &= \frac{1 \times 7}{4 \times 7} + \frac{1 \times 4}{7 \times 4} \\ &= \frac{7}{28} + \frac{4}{28} = \frac{11}{28}\end{aligned}$$

प्रश्न 16. $1\frac{3}{5}$ और $8\frac{1}{2}$ का गुणनफल ज्ञात करें।

$$\begin{aligned}\text{उत्तर : } 1\frac{3}{5} \times 8\frac{1}{2} &= \frac{8}{5} \times \frac{17}{2} \\ &= \frac{68}{5}\end{aligned}$$

प्रश्न 17. $\frac{3}{7}$ को $\frac{3}{4}$ से भाग दें।

उत्तर : $\frac{3}{7}$ को $\frac{3}{4}$ से भाग देने पर-

$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

प्रश्न 18. एक रुपये का $\frac{1}{4}$ ज्ञात कीजिए।

$$\text{उत्तर : एक रुपये का } \frac{1}{4} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

प्रश्न 19. 12 माह का $\frac{4}{12}$ ज्ञात करें।

$$\begin{aligned}\text{उत्तर : } 12 \text{ माह का } \frac{4}{12} &= 12 \times \frac{4}{12} \\ &= 4 \text{ माह}\end{aligned}$$

प्रश्न 20. दशमलव भिन्न को विस्तारित रूप में लिखिए।

(क) 4.233 (ख) 0.013

$$\text{उत्तर : (क) } 4 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}$$

$$(ख) 0 + \frac{0}{10} + \frac{1}{100} + \frac{3}{1000}$$

प्रश्न 21. 32.321 में प्रत्येक अंक का स्थान-मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर : 32.321 में प्रत्येक अंक क्रमशः स्थान - मान

$$3 \text{ का स्थान-मान} = 10$$

$$2 \text{ का स्थान-मान} = 1$$

$$3 \text{ का स्थान-मान} = \frac{1}{10}$$

$$2 \text{ का स्थान-मान} = \frac{1}{100}$$

$$1 \text{ का स्थान-मान} = \frac{1}{1000}$$

प्रश्न 22. दशमलवों के प्रत्येक जोड़ों में से कौन-सा दशमलव छोटा है?

(क) 3.1, 3.8

(ख) 31.05, 31.22

उत्तर : 3.1, 3.8 से छोटा है जबकि 31.05, 31.22 से छोटा है।

प्रश्न 23. $15.5 + 8.6 + 23.2$ का जोड़ ज्ञात कीजिए।

$$\text{उत्तर : } 15.5 + 8.6 + 23.2 = 47.3$$

प्रश्न 24. 6.4, 4.3 और 4.6 को जोड़िए।

$$\text{उत्तर : } 6.4 + 4.3 + 4.6 = 15.3$$

प्रश्न 25. 22.4 में से 13.5 को घटाइए।

$$\begin{aligned}\text{उत्तर : } 22.4 \\ - 13.5 \\ \hline 8.9\end{aligned}$$

प्रश्न 26. 6.3 तथा 3.1 में अन्तर ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{उत्तर : } 6.3 \\ - 3.1 \\ \hline 3.2\end{aligned}$$

प्रश्न 27. $73.064 - 32.168$ में अंतर ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{उत्तर : } 73.064 \\ - 32.168 \\ \hline 40.896\end{aligned}$$

प्रश्न 28. यदि एक पुस्तक का भार 2.4 किग्रा हो तो 32 पुस्तकों का भार क्या होगा?

उत्तर : एक पुस्तक का भार = 2.4 किग्रा.

$$32 \text{ पुस्तकों का भार} = 32 \times 2.4 = 76.8 \text{ किग्रा.}$$

प्रश्न 29. 3.32×236 का गुणनफल ज्ञात करें।

$$\text{उत्तर : } 3.32 \times 236 = 783.52$$

प्रश्न 30. 0.746 को 5 से भाग दीजिए।

$$\text{उत्तर : } \frac{0.746}{5} = 0.1492$$

प्रश्न 31. निम्नलिखित में प्रत्येक दशमलव संख्या का निकटतम पूर्णांक तक निकटन कीजिए।

$$7.9, 3.6, 4.3, 7.4, 6.4, 6.7$$

उत्तर : 7.9, 7 के अधिक निकट न होकर 8 के अधिक निकट है।

3.6, 3 के अधिक निकट न होकर 4 के अधिक निकट है।

4.3, 5 के अधिक निकट न होकर 4 के अधिक निकट है।

7.4, 8 के अधिक निकट न होकर 7 के अधिक निकट है।

6.4, 7 अधिक निकट न होकर 6 के अधिक निकट है।

6.7, 6 के अधिक निकट न होकर 7 के अधिक निकट है।

प्रश्न 32. प्रत्येक को प्रतिशत में लिखिए।

$$70/100, 53/100, 4/100, 99/100$$

उत्तर : $70/100 = 70$ प्रतिशत

$53/100 = 53$ प्रतिशत

$4/100 = 4$ प्रतिशत

$99/100 = 99$ प्रतिशत

प्रश्न 33. निम्नलिखित का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

300 का 20%, 1100 का 18%, 16 का 4%

उत्तर : 300 का 20 प्रतिशत

$$= \frac{300 \times 20}{100} = 60$$

$$1100 \text{ का } 18\% = 1100 \times \frac{18}{100} = 198$$

$$16 \text{ का } 4 \text{ प्रतिशत} = 16 \times \frac{4}{100} = 0.64$$

प्रश्न 34. वह राशि ज्ञात कीजिए जिसका 9 प्रतिशत 81 है।

उत्तर : x का 9% = 81

$$\frac{9x}{100} = 81$$

$$x = \frac{8100}{9}$$

$$x = 900$$

प्रश्न 35. वह राशि ज्ञात कीजिए जिसका 40 प्रतिशत 2160 है।

उत्तर : x का 40 प्रतिशत = 2160

$$\frac{40x}{100} = 2160$$

$$40x = 2160 \times 100$$

$$x = \frac{2160 \times 100}{40}$$

$$x = 54 \times 100$$

$$x = 5400$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. एक दुकानदार एक सिलाई मशीन 850 रुपये में खरीदकर 1020 रुपये में बेचता है तो उसे कितने प्रतिशत लाभ हुआ?

(a) 10%

(b) 20%

(c) 30%

(d) 40%

उत्तर-(b)

$$\begin{aligned} \text{हल- लाभ} &= \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} \\ &= 1020 - 850 \\ &= 170 \text{ रुपये} \end{aligned}$$

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \left(\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}} \right) \%$$

$$\left(\frac{170 \times 100}{850} \right) \% = 20\%$$

अतः लाभ = 20%

2. एक वस्तु को 300 रु. में बेचा गया। यदि इसे इस विक्रय मूल्य के $\frac{2}{3}$ पर बेचा जाता तो 20% की हानि होती। वस्तु का क्रय मूल्य क्या होगा?

(a) 250 रु.

(b) 240 रु.

(c) 260 रु.

(d) 360 रु.

उत्तर-(a)

हल-वस्तु का वास्तविक विक्रय मूल्य = 300 रु.

यदि इसे विक्रय मूल्य के $\frac{2}{3}$ पर बेचा जाए

$$\text{तो विक्रय मूल्य} = \frac{2}{3} \times 300 = 200 \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{क्रय मूल्य} = \frac{200 \times 100}{100 - 20} = 250 \text{ रु.}$$

3. सोहन ने एक पुराना रेफ्रिजरेटर 2500 रु. में खरीदा। उसने 500 रु. उसकी मरम्मत पर खर्च किए और 3300 रु. में बेच दिया। उसका लाभ अथवा हानि प्रतिशत क्या होगा?

(a) 5% लाभ

(b) 5% हानि

(c) 10% लाभ

(d) 10% हानि

उत्तर-(c)

$$\text{हल-क्रय मूल्य} = 2500 + 500 = 3000 \text{ रु.}$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = 3300 \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{विक्रय मूल्य} > \text{क्रय मूल्य}$$

$$\text{अतः सोहन को } 3300 \text{ रु.} - 3000 \text{ रु.} = 300 \text{ रु. का लाभ हुआ।}$$

$$3000 \text{ रु. पर लाभ} = 300 \text{ रु.}$$

$$\therefore 100 \text{ रु. पर लाभ} = \left(\frac{300}{3000} \times 100 \right) \% = 10\% \text{ लाभ}$$

4. एक साइकिल 1800 रु. में बेचने पर 10% की हानि हुई। साइकिल का क्रय मूल्य क्या होगा?

(a) 2100 रु.

(b) 2000 रु.

(c) 2500 रु.

(d) 2200 रु.

उत्तर-(b)

हल-10% हानि का अर्थ हुआ, 100 रु. क्रय मूल्य की वस्तु 90 रु. में बेची जाती है।

$$\therefore 90 \text{ रु. विक्रय मूल्य है तो क्रय मूल्य} = 100 \text{ रु.}$$

$$\therefore 1800 \text{ रु. विक्रय मूल्य है तो क्रय मूल्य}$$

$$= \frac{100 \times 1800}{90} = 2000 \text{ रु.}$$

5. भिन्न $\frac{3}{20}$ का प्रतिशत मान क्या होगा?

(a) 15%

(b) 18%

(c) 20%

(d) 22%

उत्तर-(a)

$$\text{हल- } \frac{3}{20} = \frac{3}{20} \times \frac{100}{100}$$

$$= \left(\frac{3}{20} \times 100 \right) \times \frac{1}{100}$$

$$= \left(\frac{3}{20} \times 100 \right) \%$$

$$= 15\%$$

6. श्रुति ने 65% अंक वार्षिक परीक्षा में प्राप्त किए। यदि पूर्णांक 500 रहा हो, तो श्रुति को कितने अंक मिले?

- (a) 320 (b) 325
(c) 330 (d) 335

उत्तर-(b)

$$\text{हल-श्रुति का प्राप्तांक} = 500 \text{ का } 65\% \\ = 500 \times 65\%$$

$$= 500 \times 65 \times \frac{1}{100} \\ = 325$$

7. एक दुकानदार के पास 40 आइसक्रीम के कप थे। अगर 25 कप बिक गए तो कुल कितने प्रतिशत कप बिके?

- (a) 60% (b) 62%
(c) 62.5% (d) 65%

उत्तर-(c)

$$\text{हल-बिका हुआ भाग} = \frac{25}{40} = \frac{25}{40} \times \frac{100}{100}$$

$$= \left(\frac{25}{40} \times 100 \right) \times \frac{1}{100} = \left(\frac{25}{40} \times 100 \right) \% = 62.5\%$$

8. यदि किसी धनराशि का 15%, 45 रु. हो, तो वह राशि होगी-

- (a) 300 रु. (b) 325 रु.
(c) 350 रु. (d) 250 रु.

उत्तर-(a)

हल-माना वह राशि x रु. है।

$$\therefore x \text{ का } 15\% = 45$$

$$\text{या } \frac{x \times 15}{100} = 45$$

$$\therefore x = \frac{45 \times 100}{15} = 300$$

9. एक गांव की जनसंख्या 750 है। यदि उनमें से 50 व्यक्ति निरक्षर हों, तो गांव में साक्षरता का प्रतिशत होगा?

- (a) 92% (b) 92.33%
(c) 93% (d) 93.33%

उत्तर-(d)

$$\text{हल-गांव में साक्षर व्यक्ति} = \text{कुल व्यक्ति} - \text{निरक्षर व्यक्ति} \\ = 750 - 50 = 700$$

$$\therefore \text{साक्षरता का प्रतिशत} = \frac{700 \times 100}{750} = 93.33$$

10. सलमा ने साड़ियों की सेल में 25% की छूट मिलने पर 600 रु. अंकित मूल्य की साड़ी खरीदी। साड़ी का विक्रय मूल्य होगा-

- (a) 400 रु. (b) 425 रु.
(c) 450 रु. (d) 475 रु.

उत्तर-(c)

हल-छूट या बढ़ते की राशि = अंकित मूल्य का 25%

$$= \frac{600 \times 25}{100} = 150 \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{साड़ी का विक्रय मूल्य} = 600 - 150 = 450 \text{ रु.}$$

11. एक नगर की जनसंख्या वर्ष 2001 की जनगणना में 5, 17, 524 थी। वर्ष 2011 की जनगणना में यह जनसंख्या 6,46, 905 हो गयी। नगर की जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि होगी-

- (a) 20% (b) 24%
(c) 25% (d) 25.50%

उत्तर-(c)

$$\text{हल-जनसंख्या में वृद्धि} = 646905 - 517524 \\ = 129381$$

$$\therefore \text{प्रतिशत वृद्धि} = \frac{129381}{517524} \times 100 = 25\%$$

12. 500 रु. के लिए 4% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्षों का साधारण ब्याज होगा-

- (a) 30 रु. (b) 40 रु.
(c) 45 रु. (d) 50 रु.

उत्तर-(b)

$$\text{हल-साधारण ब्याज} = \frac{500 \times 4 \times 2}{100} = 40 \text{ रु.}$$

13. किस ब्याज की दर पर एक रकम 12 वर्ष में दुगुनी हो जाएगी?

- (a) $8\frac{1}{2}\%$ (b) $8\frac{1}{3}\%$
(c) $8\frac{1}{4}\%$ (d) $8\frac{1}{5}\%$

उत्तर-(b)

हल-माना 100 रु. 12 वर्षों में दुगुना अर्थात् 200 रु. हो जाएगा।

$$\therefore \text{ब्याज} = 200 - 100 = 100 \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{ब्याज की दर} = \frac{100 \times 100}{12 \times 100} = 8\frac{1}{3}\%$$

14. यदि मूलधन = 2500 रु., समय = 2 वर्ष तथा साधारण ब्याज की दर = 12% वार्षिक हो तो मिश्रधन होगा-

- (a) 3000 रु. (b) 3100 रु.
(c) 3200 रु. (d) 3250 रु.

उत्तर-(b)

$$\text{हल-ब्याज} = \frac{2500 \times 12 \times 2}{100} = 600 \text{ रु.}$$

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{ब्याज} = 2500 + 600 = 3100 \text{ रु.}$$

उत्तर : $70/100 = 70$ प्रतिशत

$53/100 = 53$ प्रतिशत

$4/100 = 4$ प्रतिशत

$99/100 = 99$ प्रतिशत

प्रश्न 33. निम्नलिखित का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

300 का 20%, 1100 का 18%, 16 का 4%

उत्तर : 300 का 20 प्रतिशत

$$= \frac{300 \times 20}{100} = 60$$

$$1100 \text{ का } 18\% = 1100 \times \frac{18}{100} = 198$$

$$16 \text{ का } 4 \text{ प्रतिशत} = 16 \times \frac{4}{100} = 0.64$$

प्रश्न 34. वह राशि ज्ञात कीजिए जिसका 9 प्रतिशत 81 है।

उत्तर : x का 9% = 81

$$\frac{9x}{100} = 81$$

$$x = \frac{8100}{9}$$

$$x = 900$$

प्रश्न 35. वह राशि ज्ञात कीजिए जिसका 40 प्रतिशत 2160 है।

उत्तर : x का 40 प्रतिशत = 2160

$$\frac{40x}{100} = 2160$$

$$40x = 2160 \times 100$$

$$x = \frac{2160 \times 100}{40}$$

$$x = 54 \times 100$$

$$x = 5400$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. एक दुकानदार एक सिलाई मशीन 850 रूपए में खरीदकर 1020 रूपए में बेचता है तो उसे कितने प्रतिशत लाभ हुआ?

- (a) 10% (b) 20%
(c) 30% (d) 40%

उत्तर-(b)

हल- लाभ = विक्रय मूल्य - क्रय मूल्य

$$= 1020 - 850$$

$$= 170 \text{ रूपए}$$

$$\text{लाभ प्रतिशत} = \left(\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}} \right) \%$$

$$\left(\frac{170 \times 100}{850} \right) \% = 20\%$$

$$\text{अतः लाभ} = 20\%$$

2. एक वस्तु को 300 रु. में बेचा गया। यदि इसे इस विक्रय मूल्य के $\frac{2}{3}$ पर बेचा जाता तो 20% की हानि होती। वस्तु का क्रय मूल्य क्या होगा?

- (a) 250 रु. (b) 240 रु.
(c) 260 रु. (d) 360 रु.

उत्तर-(a)

हल-वस्तु का वास्तविक विक्रय मूल्य = 300 रु.

यदि इसे विक्रय मूल्य के $\frac{2}{3}$ पर बेचा जाए

$$\text{तो विक्रय मूल्य} = \frac{2}{3} \times 300 = 200 \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{क्रय मूल्य} = \frac{200 \times 100}{100 - 20} = 250 \text{ रु.}$$

3. सोहन ने एक पुराना रेफ्रिजरेटर 2500 रु. में खरीदा। उसने 500 रु. उसकी मरम्मत पर खर्च किए और 3300 रु. में बेच दिया। उसका लाभ अथवा हानि प्रतिशत क्या होगा?

- (a) 5% लाभ (b) 5% हानि
(c) 10% लाभ (d) 10% हानि

उत्तर-(c)

हल-क्रय मूल्य = 2500 + 500 = 3000 रु.

विक्रय मूल्य = 3300 रु.

$\therefore$ विक्रय मूल्य > क्रय मूल्य

अतः सोहन को 3300 रु. - 3000 रु. = 300 रु. का लाभ हुआ।

3000 रु. पर लाभ = 300 रु.

$$\therefore 100 \text{ रु. पर लाभ} = \left(\frac{300}{3000} \times 100 \right) \% = 10\% \text{ लाभ}$$

4. एक साइकिल 1800 रु. में बेचने पर 10% की हानि हुई। साइकिल का क्रय मूल्य क्या होगा?

- (a) 2100 रु. (b) 2000 रु.
(c) 2500 रु. (d) 2200 रु.

उत्तर-(b)

हल-10% हानि का अर्थ हुआ, 100 रु. क्रय मूल्य की वस्तु 90 रु. में बेची जाती है।

$\therefore$ 90 रु. विक्रय मूल्य है तो क्रय मूल्य = 100 रु.

$\therefore$ 1800 रु. विक्रय मूल्य है तो क्रय मूल्य

$$= \frac{100 \times 1800}{90} = 2000 \text{ रु.}$$

5. भिन्न $\frac{3}{20}$ का प्रतिशत मान क्या होगा?

- (a) 15% (b) 18%
(c) 20% (d) 22%

उत्तर-(a)

$$\text{हल-} \frac{3}{20} = \frac{3}{20} \times \frac{100}{100}$$

$$= \left(\frac{3}{20} \times 100 \right) \times \frac{1}{100}$$

$$= \left(\frac{3}{20} \times 100 \right) \%$$

$$= 15\%$$

6. श्रुति ने 65% अंक वार्षिक परीक्षा में प्राप्त किए। यदि पूर्णांक 500 रहा हो, तो श्रुति को कितने अंक मिले?

- (a) 320 (b) 325
(c) 330 (d) 335

उत्तर-(b)

$$\text{हल-श्रुति का प्राप्तांक} = 500 \text{ का } 65\% \\ = 500 \times 65\%$$

$$= 500 \times 65 \times \frac{1}{100} \\ = 325$$

7. एक दुकानदार के पास 40 आइसक्रीम के कप थे। अगर 25 कप बिक गए तो कुल कितने प्रतिशत कप बिके?

- (a) 60% (b) 62%
(c) 62.5% (d) 65%

उत्तर-(c)

$$\text{हल-बिका हुआ भाग} = \frac{25}{40} = \frac{25}{40} \times \frac{100}{100}$$

$$= \left(\frac{25}{40} \times 100 \right) \times \frac{1}{100} = \left(\frac{25}{40} \times 100 \right) \% = 62.5\%$$

8. यदि किसी धनराशि का 15%, 45 रु. हो, तो वह राशि होगी-

- (a) 300 रु. (b) 325 रु.
(c) 350 रु. (d) 250 रु.

उत्तर-(a)

हल-माना वह राशि x रु. है।

$$\therefore x \text{ का } 15\% = 45$$

$$\text{या } \frac{x \times 15}{100} = 45$$

$$\therefore x = \frac{45 \times 100}{15} = 300$$

9. एक गांव की जनसंख्या 750 है। यदि उनमें से 50 व्यक्ति निरक्षर हों, तो गांव में साक्षरता का प्रतिशत होगा?

- (a) 92% (b) 92.33%
(c) 93% (d) 93.33%

उत्तर-(d)

$$\text{हल-गांव में साक्षर व्यक्ति} = \text{कुल व्यक्ति} - \text{निरक्षर व्यक्ति} \\ = 750 - 50 = 700$$

$$\therefore \text{साक्षरता का प्रतिशत} = \frac{700 \times 100}{750} = 93.33$$

10. सलमा ने साड़ियों की सेल में 25% की छूट मिलने पर 600 रु. अंकित मूल्य की साड़ी खरीदी। साड़ी का विक्रय मूल्य होगा-

- (a) 400 रु. (b) 425 रु.
(c) 450 रु. (d) 475 रु.

उत्तर-(c)

हल-छूट या बट्टे की राशि = अंकित मूल्य का 25%

$$= \frac{600 \times 25}{100} = 150 \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{साड़ी का विक्रय मूल्य} = 600 - 150 = 450 \text{ रु.}$$

11. एक नगर की जनसंख्या वर्ष 2001 की जनगणना में 5, 17, 524 थी। वर्ष 2011 की जनगणना में यह जनसंख्या 6,46, 905 हो गयी। नगर की जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि होगी-

- (a) 20% (b) 24%
(c) 25% (d) 25.50%

उत्तर-(c)

$$\text{हल-जनसंख्या में वृद्धि} = 646905 - 517524 \\ = 129381$$

$$\therefore \text{प्रतिशत वृद्धि} = \frac{129381}{517524} \times 100 = 25\%$$

12. 500 रु. के लिए 4% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्षों का साधारण ब्याज होगा-

- (a) 30 रु. (b) 40 रु.
(c) 45 रु. (d) 50 रु.

उत्तर-(b)

$$\text{हल-साधारण ब्याज} = \frac{500 \times 4 \times 2}{100} = 40 \text{ रु.}$$

13. किस ब्याज की दर पर एक रकम 12 वर्ष में दुगुनी हो जाएगी?

- (a) $8\frac{1}{2}\%$ (b) $8\frac{1}{3}\%$
(c) $8\frac{1}{4}\%$ (d) $8\frac{1}{5}\%$

उत्तर-(b)

हल-माना 100 रु. 12 वर्षों में दुगुना अर्थात् 200 रु. हो जाएगा।

$$\therefore \text{ब्याज} = 200 - 100 = 100 \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{ब्याज की दर} = \frac{100 \times 100}{12 \times 100} = 8\frac{1}{3}\%$$

14. यदि मूलधन = 2500 रु., समय = 2 वर्ष तथा साधारण ब्याज की दर = 12% वार्षिक हो तो मिश्रधन होगा-

- (a) 3000 रु. (b) 3100 रु.
(c) 3200 रु. (d) 3250 रु.

उत्तर-(b)

$$\text{हल-ब्याज} = \frac{2500 \times 12 \times 2}{100} = 600 \text{ रु.}$$

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{ब्याज} = 2500 + 600 = 3100 \text{ रु.}$$

15. असलम ने 300 रु. में एक रेडियो खरीदा। वह उसे कितने रुपए में बेचे कि उसे 20% का लाभ हो?

(a) 320 रु. (b) 340 रु.
(c) 360 रु. (d) 380 रु.

उत्तर-(c)

हल-लाभ = क्रय मूल्य का 20%

$$= \frac{300 \times 20}{100} = 60 \text{ रु.}$$

∴ रेडियो का विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ = 300 + 60 = 360 रु.

16. एक खम्भा 16 मीटर लम्बा है। इसका 40% भाग लाल, 25% भाग काला और शेष भाग पीला रंगा है। पीला रंगा हुआ भाग कितने मीटर होगा?

(a) 5 मीटर (b) 5.3 मीटर
(c) 5.6 मीटर (d) 5.9 मीटर

उत्तर-(c)

$$\begin{aligned} \text{हल-पीला रंगा भाग} &= 100 - (40 + 25) \\ &= 100 - 65 \\ &= 35\% \end{aligned}$$

$$\therefore 16 \text{ मीटर का } 35\% = 16 \times \frac{35}{100} = 5.6$$

17. किसी संख्या के 120% का मान 45 है, तो उसी संख्या के 80% का मान होगा-

(a) 30 (b) 32
(c) 36 (d) 38

उत्तर-(a)

हल-माना x का 120% = 45

$$x \times \frac{120}{100} = 45$$

$$x = \frac{45 \times 100}{120} = \frac{45 \times 5}{6}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{45 \times 5}{6} \text{ का } 80\% &= \frac{45 \times 5}{6} \times \frac{80}{100} \\ &= \frac{45 \times 5}{6} \times \frac{4}{5} = 30 \end{aligned}$$

18. यदि A = y का x% तथा B = x का y% तो निम्न विकल्पों में से कौन सही है?

(a) A, B से छोटा है
(b) A, B से बड़ा है
(c) A एवं B के बीच संबंध ज्ञात नहीं किया जा सकता।
(d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर-(d)

हल-A = y का x%

$$= \left(y \times \frac{x}{100} \right) = \frac{xy}{100}$$

तथा B = x का y%

$$= \left(x \times \frac{y}{100} \right) = \frac{xy}{100}$$

∴ A = B

19. एक छात्र ने एक संख्या में $\frac{5}{3}$ के स्थान पर $\frac{3}{5}$ से गुणा कर दिया। तो

गणना में प्रतिशत त्रुटि क्या होगी?

(a) 60% (b) 62%
(c) 64% (d) 66%

उत्तर-(c)

हल-माना वह संख्या x है।

$$\text{तब गणना में त्रुटि} = \frac{5}{3}x - \frac{3}{5}x = \frac{16}{15}x$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{प्रतिशत त्रुटि} &= \left(\frac{16x}{15} \times \frac{3}{5x} \times 100 \right) \% \\ &= 64\% \end{aligned}$$

20. किसी कक्षा में छात्रों की संख्या 60 से घटकर 45 रह गयी। छात्रों की संख्या में प्रतिशत कमी होगी?

(a) 20 (b) 25
(c) 30 (d) 35

उत्तर-(b)

हल-छात्रों की संख्या में कमी = 60 - 45 = 15

$$\text{प्रतिशत कमी} = \frac{15}{60} \times 100 = 25\%$$

21. राकेश के पिता की वार्षिक आय 1,08,000 रुपए हैं। यदि 100,000 रु. तक की आय आयकर से मुक्त है, तो 10% की दर से उन्हें कितना आयकर देना पड़ेगा?

(a) 850 रु. (b) 800 रु.
(c) 950 रु. (d) 900 रु.

उत्तर-(b)

हल-आय जिस पर कर देना है = (1,08,000 - 100,000) = 8000 रु.

देय कर राशि = 8000 रु. का 10%

$$= \frac{8000 \times 10}{100} \text{ रु.}$$

$$= 800 \text{ रु.}$$

22. प्रतीक्षा ने वार्षिक परीक्षा में 700 में से 490 अंक प्राप्त किए। उसे कुल कितने प्रतिशत अंक मिले?

(a) 65% (b) 70%
(c) 75% (d) 78%

उत्तर-(b)

$$\text{हल-अंकों का प्रतिशत} = \left(\frac{490}{700} \times 100 \right) = 70\%$$

23. R% वार्षिक दर से P रु. पर T वर्ष का साधारण ब्याज होगा—

- (a) $\frac{P \times T}{100 \times R}$ (b) $\frac{P \times R}{100 \times T}$
(c) $\frac{P \times T \times R}{100}$ (d) $\frac{100}{P \times T \times R}$

उत्तर—(c)

हल— 100 रु. पर 1 वर्ष का ब्याज = R रु.

$$\therefore 1 \text{ रु. पर 1 वर्ष का ब्याज} = \frac{R}{100} \text{ रु.}$$

$$\therefore 1 \text{ रु. पर T वर्ष का ब्याज} = \frac{R \times T}{100} \text{ रु.}$$

$$\therefore P \text{ रु. पर T वर्ष का ब्याज} = \frac{P \times T \times R}{100} \text{ रु.}$$

24. किस राशि पर 8 मास का ब्याज 6.25% वार्षिक दर से 37.50 रु. हो जाएगा—

- (a) 800 रु. (b) 900 रु.
(c) 850 रु. (d) 950 रु.

उत्तर—(b)

$$\text{हल—मूलधन} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}}$$

$$\text{समय} = 8 \text{ मास} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ वर्ष}$$

$$\therefore \text{मूलधन} = \frac{37.50 \times 100}{6.25 \times \frac{2}{3}} = \frac{6 \times 100 \times 3}{2} = 900 \text{ रु.}$$

25. 35 का 20% = 70 का x%, x का मान होगा—

- (a) 10 (b) 2
(c) 0.1 (d) 100

उत्तर—(a)

हल— 35 का 20% = 70 का x%

$$35 \times \frac{20}{100} = 70 \times \frac{x}{100}$$

$$\text{या } x = 10$$

26. 16 ग्राम सोने में कितना ताँबा मिलाया जाय कि सोने और ताँबे का अनुपात 5 : 2 हो जाय?

- (a) 5.3 ग्राम (b) 6.2 ग्राम
(c) 6.6 ग्राम (d) 6.4 ग्राम

उत्तर—(d)

हल—माना x ग्राम ताँबा मिलाया जाय

प्रश्नानुसार, $16 : x = 5 : 2$

$$5 \times x = 16 \times 2$$

$$x = \frac{16 \times 2}{5} = 6 \frac{2}{5} \text{ ग्राम}$$

$$= \text{या } 6.4 \text{ ग्राम}$$

27. एक दूधिया 10 लीटर दूध में 1 लीटर पानी मिलाता है। दूध और पानी का अनुपात 4 : 1 करने के लिए उसमें अतिरिक्त पानी की आवश्यकता होगी—

- (a) $1 \frac{1}{2}$ लीटर (b) $2 \frac{1}{2}$ लीटर
(c) $1 \frac{1}{4}$ लीटर (d) $2 \frac{1}{4}$ लीटर

उत्तर—(a)

हल—वर्तमान में, दूध : पानी = 10 : 1

माना x लीटर पानी और मिला देने पर—

प्रश्नानुसार, $10 : (1 + x) = 4 : 1$

$$4 + 4x = 10$$

$$4x = 6$$

$$\Rightarrow x = 1 \frac{1}{2} \text{ लीटर}$$

28. किन्हीं दो संख्याओं में 3 : 5 का अनुपात है। प्रत्येक में 8 जोड़ने पर उन संख्याओं में 2 : 3 का अनुपात हो जाता है, वे संख्याएँ हैं, क्रमशः—

- (a) 34, 35 (b) 24, 26
(c) 24, 40 (d) 25, 28

उत्तर—(c)

हल—संख्याओं में अनुपात = 3 : 5

माना संख्याएँ 3x तथा 5x हैं।

प्रत्येक में 8 जोड़ने पर संख्याएँ 3x + 8 तथा 5x + 8 हो जाती हैं।

$$\text{प्रश्नानुसार, } \frac{3x + 8}{5x + 8} = \frac{2}{3}$$

$$\text{या } 2(5x + 8) = 3(3x + 8)$$

$$10x + 16 = 9x + 24$$

$$x = 8$$

अतः अभीष्ट संख्याएँ $3 \times 8 = 24$ तथा $5 \times 8 = 40$ होंगी।

29. यदि अनुपात $3x + 1 : 8x + 1, 2 : 3$ का वर्गानुपात हो तो x का मान होगा—

- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

उत्तर—(a)

$$\text{हल—प्रश्नानुसार, } \frac{3x + 1}{8x + 1} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$\text{या } 9(3x + 1) = 4(8x + 1)$$

$$\text{या } 27x + 9 = 32x + 4$$

$$\text{या } 5x = 5$$

$$x = 1$$

30. $\sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{729}$ का मान होगा—

- (a) 5 : 6 (b) 6 : 7
(c) 7 : 8 (d) 8 : 9

उत्तर—(d)

$$\text{हल—} \sqrt[3]{512} : \sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{8 \times 8 \times 8} : \sqrt[3]{9 \times 9 \times 9}$$

$$= 8 : 9$$

31. दी हुई संख्या 9 और 16 का मध्यानुपात होगा-

- (a) 10 (b) 11
(c) 12 (d) 13

उत्तर-(c)

हल-माना मध्यानुपात x है।

$$9 : x :: x : 16$$

$$x^2 = 9 \times 16$$

$$x = \sqrt{9 \times 16} = 3 \times 4 = 12$$

32. यदि $4a^2 - 11ab + 6b^2 = 0$ तो $a : b$ का मान होगा-

- (a) 1 : 2 (b) 3 : 5
(c) 2 : 1 (d) 3 : 2

उत्तर-(c)

$$\text{हल- } 4a^2 - 11ab + 6b^2 = 0$$

$$4a^2 - 8ab - 3ab + 6b^2 = 0$$

$$4a(a - 2b) - 3b(a - 2b) = 0$$

$$(a - 2b)(4a - 3b) = 0$$

$$\text{जब } a - 2b = 0 \text{ तब } a = 2b \text{ या } \frac{a}{b} = \frac{2}{1}$$

$$\text{अतः } a : b = 2 : 1$$

$$\text{जब } 4a - 3b = 0 \text{ तब } 4a = 3b \text{ या } \frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

$$\text{या } a : b = 3 : 4$$

$$a : b = 2 : 1 \text{ या } 3 : 4$$

अतः विकल्पानुसार अभीष्ट उत्तर विकल्प (c) होगा।

33. 40 किमी. प्रति घण्टा की चाल से चलने वाली 200 मीटर लम्बी एक रेलगाड़ी को 300 मीटर लम्बे प्लेटफार्म को पार करने में समय लगेगा-

- (a) 40 सेकण्ड (b) 42 सेकण्ड
(c) 44 सेकण्ड (d) 45 सेकण्ड

उत्तर-(d)

$$\text{हल-कुल दूरी} = 200 + 300 = 500 \text{ मीटर}$$

$$\therefore \text{रेलगाड़ी } 40 \times 1000 \text{ मीटर चलती है} = 60 \text{ मिनट में}$$

$$\therefore 500 \text{ मीटर चलेगी} = \frac{60 \times 500}{40 \times 1000} \text{ मिनट में}$$

$$= \frac{3}{4} \text{ मिनट में}$$

$$= 45 \text{ सेकण्ड में}$$

34. इस समय पिता और पुत्र की आयु का योग 33 वर्ष है। 18 वर्ष बाद पिता की आयु पुत्र की आयु की दोगुनी हो जायेगी। पिता और पुत्र की वर्तमान आयु है, क्रमशः-

- (a) 28 वर्ष, 5 वर्ष (b) 24 वर्ष, 3 वर्ष
(c) 35 वर्ष, 8 वर्ष (d) 36 वर्ष, 6 वर्ष

उत्तर-(a)

हल-माना पिता की वर्तमान आयु x वर्ष तथा पुत्र की वर्तमान आयु y वर्ष है।

$$\text{प्रश्नानुसार, } x + y = 33 \quad \dots (1)$$

$$\text{तथा } x + 18 = 2(y + 18) \quad \dots (2)$$

समीकरण (2) को सरल करने पर

$$x + 18 = 2y + 36$$

अथवा

$$x - 2y = 18 \quad \dots (3)$$

समी. (1) और (3) को हल करने पर -

$$y = 5, x = 28$$

35. 6500 रु. को 2 : 3 : 4 अनुपात के विलोमानुपात में विभाजित करने पर

प्रत्येक का हिस्सा होगा क्रमशः-

$$(a) 3000 \text{ रु., } 2000 \text{ रु., } 1500 \text{ रु.}$$

$$(b) 2000 \text{ रु., } 3000 \text{ रु., } 1500 \text{ रु.}$$

$$(c) 1500 \text{ रु., } 2000 \text{ रु., } 3000 \text{ रु.}$$

$$(d) 1500 \text{ रु., } 3000 \text{ रु., } 2000 \text{ रु.}$$

उत्तर-(a)

$$\text{हल- } 2 : 3 : 4 \text{ का विलोमानुपात} = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$$

$$= \frac{12}{2} : \frac{13}{3} : \frac{12}{4}$$

$$= 6 : 4 : 3$$

$$\text{पहले भाग की राशि} = \frac{6}{13} \times 6500 = 3000 \text{ रु.}$$

$$\text{दूसरे भाग की राशि} = \frac{4}{13} \times 6500 = 2000 \text{ रु.}$$

$$\text{तीसरे भाग की राशि} = \frac{3}{13} \times 6500 = 1500 \text{ रु.}$$

36. रमेश अकेला किसी कार्य को 15 घण्टे में समाप्त कर सकता है तथा सुरेश अकेला इसी कार्य को 12 घण्टे में समाप्त कर सकता है। दोनों मिलकर इस कार्य को समाप्त करेंगे-

$$(a) 400 \text{ मिनट में} \quad (b) 300 \text{ मिनट में}$$

$$(c) 200 \text{ मिनट में} \quad (d) 160 \text{ मिनट में}$$

उत्तर-(a)

$$\text{हल- रमेश का 1 घण्टे का कार्य} = \frac{1}{15}$$

$$\text{सुरेश का 1 घण्टे का कार्य} = \frac{1}{12}$$

$$(\text{रमेश} + \text{सुरेश}) \text{ का 1 घण्टे का कार्य} = \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{12} \right)$$

$$= \frac{3}{20}$$

अतः रमेश तथा सुरेश दोनों द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने में लिया गया समय = $\frac{20}{3}$ घण्टे = 6 घण्टे 40 मिनट
 $= (6 \times 60 + 40) \text{ मिनट} = 400 \text{ मिनट}$

37. यदि 40 व्यक्ति किसी कार्य को 15 दिन में समाप्त कर सकते हैं, तो 30 व्यक्ति इस कार्य को समाप्त करेंगे—

(a) 24 दिन (b) 28 दिन
 (c) 27 दिन (d) 20 दिन

उत्तर—(d)

हल—कम व्यक्ति, अधिक दिन (विलोमानुपात)

इस प्रकार $30 : 40 :: 15 : x$

$$x = \frac{40 \times 15}{30}$$

$$x = 20 \text{ दिन}$$

$$\begin{aligned} M_1 D_1 &= M_2 D_2 \rightarrow \text{सूत्र} \\ 40 \times 15 &= 30 \times D_2 \\ D_2 &= \frac{40 \times 15}{30} = 20 \text{ दिन} \end{aligned}$$

38. यदि A तथा B एक कार्य को अलग-अलग क्रमशः 30 दिन तथा 40 दिन में समाप्त कर सकें, तो दोनों मिलकर इस कार्य को कितने दिन में समाप्त करेंगे—

(a) $17\frac{1}{7}$ दिन (b) $27\frac{1}{7}$ दिन
 (c) $42\frac{3}{4}$ दिन (d) 70 दिन

उत्तर—(a)

$$\text{हल— A का 1 दिन का कार्य} = \frac{1}{30}$$

$$\text{B का 1 दिन का कार्य} = \frac{1}{40}$$

$$\begin{aligned} (A + B) \text{ का 1 दिन का कार्य} &= \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{40} \right) \\ &= \frac{7}{120} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{कार्य समाप्त होने में लगा समय} = \frac{120}{7} = 17\frac{1}{7} \text{ दिन}$$

39. रमेश, हरीश तथा सुरेश किसी कार्य को क्रमशः 15 दिन, 10 दिन तथा 6 दिन में करते हैं। तीनों मिलकर इस कार्य को समाप्त करेंगे—

(a) 3 दिन (b) $3\frac{1}{2}$ दिन (c) $3\frac{3}{20}$ दिन (d) $3\frac{9}{20}$ दिन

उत्तर—(a)

$$\begin{aligned} \text{हल—तीनों का 1 दिन का कार्य} &= \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{कार्य पूरा करने में लगा समय} = 3 \text{ दिन}$$

40. 21 मजदूर किसी दीवार को 25 दिनों में बना सकते हैं। यदि 14 मजदूर और लगा दिये जायें, तो वे पूर्ण कार्य कितने दिनों में समाप्त करेंगे?

(a) 10 दिन (b) 12 दिन
 (c) 14 दिन (d) 15 दिन

उत्तर—(d)

हल—अधिक मजदूर, कम दिन (विलोमानुपात)

$$35 : 21 :: 25 : x$$

$$x = \frac{21 \times 25}{35}$$

$$x = 15 \text{ दिन}$$

$$\begin{aligned} M_1 D_1 &= M_2 D_2 \rightarrow \text{सूत्र} \\ 21 \times 25 &= 35 \times D_2 \\ (M_2 = 21 + 14 = 35) \\ D_2 &= \frac{21 \times 25}{35} = 15 \text{ दिन} \end{aligned}$$

41. एक व्यक्ति 6 घण्टे, 5 किमी. प्रति घण्टा की चाल से तथा 12 घण्टे, 4 किमी. प्रति घण्टा की चाल से यात्रा करता है। उसकी औसत चाल होगी—

(a) 4 किमी./घण्टा (b) $4\frac{1}{3}$ किमी./घण्टा
 (c) $4\frac{1}{2}$ किमी./घण्टा (d) $4\frac{2}{3}$ किमी./घण्टा

उत्तर—(b)

$$\begin{aligned} \text{हल— कुल तय की गई दूरी} &= (6 \times 5 + 12 \times 4) \text{ किमी.} \\ &= 78 \text{ किमी.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कुल समय} &= (6 + 12) \text{ घण्टे} \\ &= 18 \text{ घण्टे} \end{aligned}$$

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}} = \frac{78}{18} = 4\frac{1}{3} \text{ किमी./घण्टा}$$

42. A एक कार्य को 15 दिन में समाप्त कर सकता है, जबकि B इस कार्य को 10 दिन में पूरा कर सकता है। B ने 5 दिन कार्य करके छोड़ दिया। शेष कार्य A अकेला समाप्त करेगा—

(a) $6\frac{1}{2}$ दिन में (b) $7\frac{1}{2}$ दिन में
 (c) 8 दिन में (d) 9 दिन में

उत्तर—(b)

हल—B द्वारा 5 दिन में किया गया कार्य

$$= \left(5 \times \frac{1}{10} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{शेष कार्य} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{माना } \frac{1}{2} \text{ कार्य, A अकेला } x \text{ दिन में करेगा,}$$

$$\therefore x \times \frac{1}{15} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} \text{ दिन}$$

43. शान्त जल में एक नाव की चाल 13 किमी. प्रति घण्टा है, तथा धारा का वेग 4 किमी. प्रति घण्टा है। धारा की दिशा में 68 किमी. दूरी तय करने में नाव को समय लगेगा—

(a) 4 घण्टा (b) 6 घण्टा
(c) 3 घण्टा (d) 5 घण्टा

उत्तर—(a)

हल—धारा की दिशा में नाव की चाल = (नाव की चाल + धारा की चाल)
= (13 + 4) = 17 किमी. प्रति घंटा

धारा की दिशा में कुल दूरी = 68 किमी.

$$\therefore \text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

$$= \frac{68}{17} = 4 \text{ घण्टा}$$

44. एक व्यक्ति किसी निश्चित दूरी को 8 किमी. प्रति घण्टा की चाल से तय करता है तथा 6 किमी. प्रति घण्टा की चाल से वापस प्रारम्भिक बिन्दु तक

लौटता है। यदि कुल दूरी $3\frac{1}{2}$ घण्टे में तय की गई हो, तो यह दूरी है—

(a) 28 किमी. (b) 24 किमी.
(c) 14 किमी. (d) 16 किमी.

उत्तर—(b)

हल—माना कुल दूरी = $2x$ किमी.

$$\text{तब } \left(\frac{x}{8} + \frac{x}{6} \right) = 3\frac{1}{2},$$

$$\frac{6x + 8x}{48} = \frac{7}{2}$$

$$14x = 7 \times 24$$

$$x = \frac{7 + 24}{14} = 12 \text{ किमी.}$$

$$x = 12 \text{ किमी.}$$

अतः कुल दूरी ($2x$) = 24 किमी.

45. 30 मीटर प्रति सेकण्ड की गति से जा रही 270 मीटर लम्बी रेलगाड़ी, 180 मीटर लम्बे पुल को पार करने में कितना समय लेगी—

(a) 6 सेकण्ड (b) 3 सेकण्ड
(c) 9 सेकण्ड (d) 15 सेकण्ड

उत्तर—(d)

हल—रेलगाड़ी की चाल = 30 मीटर/सेकण्ड

दूरी = (रेलगाड़ी की लम्बाई + पुल की लम्बाई)

$$= (270 + 180) \text{ मीटर}$$

$$= 450 \text{ मीटर}$$

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

$$= \frac{450}{30}$$

$$= 15 \text{ सेकण्ड}$$

46. एक नाविक धारा के विरुद्ध 11 किमी. जाता है तथा धारा की दिशा में 27 किमी.। उसे प्रत्येक दशा में 4 घण्टे लगते हैं। धारा का वेग होगा—

(a) 3 किमी./घण्टा (b) 4 किमी./घण्टा
(c) 2 किमी./घण्टा (d) 1 किमी./घण्टा

उत्तर—(c)

$$\text{हल—नाविक की धारा की दिशा में चाल} = \left(\frac{27}{4} \right) \text{ किमी./घण्टा}$$

$$\text{नाविक की धारा के विपरीत चाल} = \left(\frac{11}{4} \right) \text{ किमी./घण्टा}$$

$$\text{धारा की चाल} = \frac{1}{2} (\text{नाविक की धारा के दिशा में चाल} - \text{नाविक की धारा के विपरीत चाल})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{27}{4} - \frac{11}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{16}{4} = 2 \text{ किमी./घण्टा}$$

47. चार संख्याओं में से प्रथम तीन का औसत 15 है तथा अन्तिम तीन का औसत 16 है। यदि अन्तिम संख्या 19 हो, तो प्रथम संख्या है—

(a) 15 (b) 16
(c) 17 (d) 18

उत्तर—(b)

हल—माना प्रथम, द्वितीय, तृतीय व चतुर्थ संख्या क्रमशः a, b, c तथा d हैं।
प्रश्नानुसार,

$$(a + b + c) = 3 \times 15 = 45 \quad \text{.....(1)}$$

$$(b + c + d) = 3 \times 16 = 48 \quad \text{.....(2)}$$

समी. (2) में से समी. (1) घटाने पर

$$d - a = 3$$

$$\text{या } 19 - a = 3$$

$$\therefore a = 19 - 3 = 16$$

48. यदि 10 मीटर कपड़े का क्रय मूल्य 180 रु. प्रति मीटर है। तो 20 मीटर कपड़े का क्रय मूल्य होगा—

(a) 280 (b) 305
(c) 360 (d) 336

उत्तर—(c)

हल—

$$\therefore 10 \text{ मीटर कपड़े का क्रय मूल्य} = 180 \text{ रु.}$$

$$\therefore 20 \text{ मीटर कपड़े का क्रय मूल्य} = \frac{180}{10} \times 20 = 360 \text{ रु.}$$

49. A, B एवं C ने एक व्यापार में क्रमशः 3800 रु., 4000 रु. तथा 4200 रु. का निवेश किया। उस व्यापार से प्राप्त कुल 1800 रु. के लाभ में से A और B का हिस्सा होगा, क्रमशः—

(a) 380 रु. 820 (b) 400 रु. 480

(c) 520 रु. 540

(d) 570 रु. 600

उत्तर-(d)

$$\text{हल-} 3800 : 4000 : 4200 = 19 : 20 : 21$$

इस प्रकार, A का लाभ में हिस्सा = $\frac{19}{60} \times 1800 = 570$ रु.

तथा B का लाभ में हिस्सा = $\frac{20}{60} \times 1800 = 600$ रु.

50. 100 बच्चों में 70 रु. इस प्रकार बाँटा जाता है कि प्रत्येक लड़के को 1 रु. तथा प्रत्येक लड़की को 50 पैसे मिलते हैं। लड़के और लड़कियों की संख्या है, क्रमशः-

- (a) 45, 29 (b) 40, 60
(c) 42, 30 (d) 43, 36

उत्तर-(b)

हल-माना लड़कों की संख्या x तथा लड़कियों की संख्या y है।

$$x + y = 100 \quad \dots\dots(1)$$

प्रश्नानुसार, $x + \frac{y}{2} = 70$

या $2x + y = 140 \quad \dots\dots(2)$

समी. (1) और (2) से

$$x = 40, y = 60$$

51. एक परीक्षा में 10 विद्यार्थियों का औसत प्राप्तांक 60 है। एक विद्यार्थी के प्राप्तांक छोड़ दिये जाने पर औसत प्राप्तांक 55 हो जाता है। उस विद्यार्थी का प्राप्तांक है-

- (a) 55 (b) 60
(c) 105 (d) 115

उत्तर-(c)

हल- 10 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का कुल योग

$$= 10 \times 60 = 600$$

$$9 \text{ विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का कुल योग} = 9 \times 55 = 495$$

$$\text{शेष बचे विद्यार्थी के प्राप्तांक} = 600 - 495 = 105$$

52. परिमेय व्यंजक $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-1)(x^2-2x-3)}$ को निम्नतम पदों में व्यक्त करने पर अभीष्ट उत्तर होगा-

(a) $\frac{x+4}{x-1}$ (b) $\frac{x-4}{x-1}$

(c) $\frac{x+4}{x+1}$ (d) $\frac{x-4}{x+1}$

उत्तर-(d)

$$\text{हल-} (x-3)(x^2-5x+4) = (x-3)(x-4)(x-1)$$

$$(x-1)(x^2-2x-3) = (x-1)(x+1)(x-3)$$

$$\therefore \frac{(x-3)(x-4)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{(x-4)}{(x+1)}$$

53. परिमेय व्यंजक $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}$ का निम्नतम पदों में व्यक्त रूप होगा-

(a) $\frac{x+4}{x-4}$ (b) $\frac{x-4}{x+4}$

(c) $\frac{x+2}{x-2}$ (d) $\frac{x-2}{x+2}$

उत्तर-(b)

$$\text{हल-} x^2-8x+16 = (x-4)^2$$

$$x^2-16 = (x+4)(x-4)$$

$$\therefore \frac{(x-4)^2}{(x+4)(x-4)} = \frac{x-4}{x+4}$$

54. यदि $A = \frac{2x+1}{2x-1}$ और $B = \frac{2x-1}{2x+1}$, तो A-B का मान होगा-

(a) $\frac{8x}{4x^2-1}$ (b) $\frac{9x}{8x^2-1}$

(c) $\frac{6x}{4x^2-1}$ (d) $\frac{4x}{3x^2-1}$

उत्तर-(a)

$$\text{हल-} A-B = \frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$= \frac{(2x+1)^2 - (2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 4x - 1}{4x^2 - 1} = \frac{8x}{4x^2 - 1}$$

55. परिमेय व्यंजक $\frac{x^2-3x}{x+5}$ का योज्य व्युत्क्रम होगा-

(a) $\frac{x+5}{x^2-3x}$

(b) $\frac{x^2-3x}{x+5}$

(c) $\frac{x^2+3x}{x-5}$

(d) $\frac{-x^2+3x}{x+5}$

उत्तर-(d)

$$\text{हल-योज्य व्युत्क्रम} = \frac{-(x^2-3x)}{x+5} = \frac{-x^2+3x}{x+5}$$

56. 9xy तथा 15xz का लघुत्तम समापवर्त्य होगा-

(a) 3x

(b) 45xy

(c) 45xyz

(d) 3xy

उत्तर-(c)

$$\text{हल- } 9xy = 3x \times 3y$$

$$15xz = 3x \times 5z$$

$$\therefore \text{ लघुत्तम समापवर्त्य } = 3x \times 3y \times 5z \\ = 45xyz$$

57. $2x(x+y)$, $6x^2(x+y)$, $12x^2(x+y)^2$ का महत्तम समापवर्तक होगा—

- (a) $x(x+y)$ (b) $2x(x+y)$
(c) $3x(x+y)$ (d) $4x(x+y)$

उत्तर—(b)

$$\text{हल- } 2x(x+y) = 2 \times x \times (x+y)$$

$$6x^2(x+y) = 2 \times 3 \times x \times x \times (x+y)$$

$$12x^2(x+y)^2 = 2 \times 2 \times 3 \times x \times x \times (x+y) \times (x+y)$$

$$\text{अतः अभीष्ट महत्तम समापवर्तक} = 2 \times x \times (x+y) = 2x(x+y)$$

58. $-\frac{4}{3}pq$ और $\frac{3}{2}p^2r$ का गुणनफल होगा—

- (a) $2pqr$ (b) $2p^2qr$ (c) $2p^3qr$ (d) $-2p^3qr$

उत्तर—(d)

$$\text{हल- } \left(-\frac{4}{3}pq\right) \times \left(\frac{3}{2}p^2r\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}\right) \times (p \times p^2 \times q \times r)$$

$$= (-2) \times (p^3qr) = -2p^3qr$$

59. $4m^2 - 4m + 1$ का गुणनखण्ड होगा—

- (a) $(m-1)(m-1)$ (b) $(m-1)(m+1)$
(c) $(2m-1)(2m-1)$ (d) $(2m-1)(2m+1)$

उत्तर—(c)

$$\text{हल- } 4m^2 - 4m + 1 = (2m)^2 - 2 \times 2m \times 1 + 1^2 \\ = (2m-1)^2 \\ = (2m-1)(2m-1)$$

60. रमेश, संजीव से तीन वर्ष बड़ा है। छ: वर्ष पहले रमेश की आयु संजीव की आयु की चार गुनी थी। रमेश एवं संजीव की वर्तमान आयु क्रमशः होगी—

- (a) 10 वर्ष, 7 वर्ष (b) 9 वर्ष, 6 वर्ष
(c) 8 वर्ष, 5 वर्ष (d) 11 वर्ष, 8 वर्ष

उत्तर—(a)

$$\text{हल-माना संजीव की वर्तमान आयु} = x \text{ वर्ष}$$

$$\text{तो रमेश की वर्तमान आयु} = (x+3) \text{ वर्ष।}$$

$$\text{छ: वर्ष पूर्व संजीव की आयु} = (x-6) \text{ वर्ष}$$

$$\text{छ: वर्ष पूर्व रमेश की आयु} = (x+3-6) \\ = (x-3) \text{ वर्ष}$$

$\therefore$ प्रश्नानुसार—

$$(x-3) = 4(x-6)$$

$$\Rightarrow -3x = -21$$

$$\therefore x = 7$$

$$\therefore \text{संजीव की आयु} = 7 \text{ वर्ष}$$

$$\text{रमेश की आयु} = 10 \text{ वर्ष}$$

61. दो व्यंजकों की महत्तम समापवर्तक $(x-2)$ तथा लघुत्तम समापवर्त्य $(x^3 - 5x^2 + 6x)$ है। यदि एक व्यंजक $(x^2 - 2x)$ है तो दूसरा व्यंजक होगा—

- (a) $x^2 - 6x + 5$ (b) $x^2 - 2x + 3$
(c) $x^2 - 5x + 6$ (d) $x^2 + 5x - 6$

उत्तर—(c)

$$\text{हल-म.स.} = (x-2)$$

$$\text{ल.स.} = (x^3 - 5x^2 + 6x)$$

$$= x(x^2 - 5x + 6)$$

$$= x(x-2)(x-3)$$

$$\therefore \text{दूसरा व्यंजक} = \frac{\text{म.स.} \times \text{ल.स.}}{\text{पहला व्यंजक}}$$

$$= \frac{(x-2) \times x \times (x-2) \times (x-3)}{x(x-2)}$$

$$= (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

62. यदि $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ हो तो $f(2)$ का मान होगा—

- (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

उत्तर—(c)

$$\text{हल-} x \text{ के स्थान पर } 2 \text{ रखने पर}$$

$$f(2) = 2 \times (2)^2 - 5 \times 2 + 1$$

$$= 2 \times 4 - 10 + 1$$

$$= -1$$

63. यदि $f(x) = \frac{1}{x} + Ax$ और $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{28}{5}$ तो A का मान होगा—

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 0

उत्तर—(c)

$$\text{हल-} f(x) = \frac{1}{x} + Ax$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = 5 + A \times \frac{1}{5}$$

$$\therefore \frac{28}{5} = \frac{25 + A}{5}$$

$$A = 28 - 25 = 3$$

64. यदि $g(x) = -3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, तो g का प्रान्त होगा—

- (a) सभी पूर्णाकों का समुच्चय
(b) सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
(c) सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय
(d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर—(b)

$$\text{हल-} g(x) = -3x + 2, x \text{ के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए परिभाषित है।}$$

$$\text{अतः } g \text{ का प्रान्त} = \text{सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय।}$$

■ मापन और क्षेत्रमिति

मापन ऐसा सर्वाधिक महत्वपूर्ण क्षेत्र है जिसमें बच्चे अपने अंकों के ज्ञान का प्रयोग कर सकते हैं। प्राथमिक कक्षाओं में छात्रों को मापन इकाइयों से और उन युक्तियों से अवगत कराया जाता है जिनसे माप बनते हैं। उन्हें वे प्रत्यक्ष अनुभव भी प्रदान किए जाते हैं जिनमें मापों का प्रयोग किया जाता है।

हमारी मापन पद्धति मीटरी (दशमिक) है। अतः पूर्णांकों संबंधी संक्रियाओं के लिए अपनाए गए नियम और प्रक्रियाएं लंबाई, धारिता और भार की मापों पर लागू होते हैं।

● उद्देश्य

- ◆ लंबाई, भार, क्षेत्र, क्षमता, धनराशि और समय की मानक मापन इकाइयों की आवश्यकता के महत्व को समझना।
- ◆ मापन की एक इकाई को दूसरी इकाई में रूपांतरित करना।
- ◆ मापन की विभिन्न इकाइयों के बीच संबंध की पहचान करना।
- ◆ विभिन्न स्थितियों में मापन इकाइयों का समुचित प्रयोग करना।
- ◆ धारिता, क्षेत्र, भार, लंबाई, धनराशि और समय की विभिन्न मापन इकाइयों का प्रत्यास्मरण करना।

लंबाई, क्षेत्र, धनराशि, धारिता और समय का अनौपचारिक मापन— मापन शिक्षण के प्रथम चरण में वे अनौपचारिक अनुभव समाविष्ट हैं जिसमें विद्यार्थी दो (समान) वस्तुओं जैसे दो दूरियों, दो द्रव्यमानों, दो धारिताओं आदि की तुलना करते हैं। इसका प्रयोजन इंद्रियों को प्रशिक्षित करना है और अधिक, बड़ा, कम छोटा, नीचा, ऊंचा, हल्का तथा भारी इत्यादि का बोध कराना है। मापने का अर्थ गुणन अर्थात् कितने गुना का प्रयोग करते हुए 'तुलना करना' है।

धारिताओं में तुलना—शिक्षार्थियों से एक मग और एक बाल्टी लेने के लिए कहें तथा उन्हें यह प्रेक्षण करने दें कि मग में बाल्टी से कम पानी आता है। शिक्षार्थी यह जानते हैं कि दूध, तेल, दवाइयां जैसी बहुत-सी वस्तुएं विभिन्न आकार के पात्रों में बेची जाती हैं।

चरण 2. अब विद्यार्थियों को मग से बाल्टी में पानी डालने के लिए कहें और प्रेक्षण करने दें कि एक बाल्टी में (मान लीजिए) 15 मग पानी आता है। अब कहें कि बाल्टी की धारिता = 15 मग। यहां मग धारिता मापक इकाई है और 15, बाल्टी की धारिता की माप है।

समय माप—समय को मूल रूप से प्राकृतिक इकाइयों, जैसे रात, दिन आदि में मापा जा सकता है। छात्रों द्वारा कैलेंडर, मौसम और घड़ी के माध्यम से कक्षा में समय के बारे में सीखना प्रारंभ हो जाता है। वे सीखते हैं कि घड़ी किस प्रकार दैनिक जीवन की क्रियाओं के विनियमन में सहायता करती है।

धनराशि माप—वस्तुओं के मूल्य का माप धन है। प्राचीन समय में लोग वस्तुओं का विनिमय करते थे। विद्यार्थियों को बोध कराएं कि व्यापार और उद्योग धन के बिना संभव नहीं है। वस्तुओं के विनिमय के अनौपचारिक अनुभव और खरीदने-बेचने की क्रियाओं में धन के प्रयोग को प्रोत्साहित करें।

माप की मानक इकाइयां और उनके अंतर्संबंध—पूर्व उल्लिखित अनौपचारिक क्रियाओं द्वारा शिक्षक विद्यार्थियों को मापन की एकरूप मानक प्रणाली की आवश्यकता का बोध करा सकता है। पहले देशों के समूह या किसी एक देश की अपनी मापन प्रणाली होती थी। यदि आवश्यक हो तो शिक्षक देश में प्रयुक्त होने वाले ब्रिटिश मापों के उदाहरण दे सकता है।

फिर भी अब भार और माप की मीटरी प्रणाली को सर्वमान्य प्रणाली स्वीकार किया गया है। मीटरी प्रणाली हमारी संख्या प्रणाली से संबंधित है क्योंकि यह आधार दस का प्रयोग करती है। मीटरी प्रणाली में माप की इकाइयां हैं,

लंबाई → मीटर, भार → ग्राम, धारिता → लीटर

(मी.) (ग्रा.) (ली.)

मानक इकाइयों के शिक्षण को 3 चरणों में प्रस्तुत करें।

1. सामान्य रूप से प्रयुक्त इकाइयों का परिचय—धारिता के लिए लीटर और मिलीलीटर, भार के लिए किलोग्राम और ग्राम, लंबाई के लिए मीटर, सेंटीमीटर और किलोमीटर।
2. मापों के साथ चार मूलभूत संक्रियाएं।
3. बहु इकाइयों और उप-इकाइयों और उनके संबंधों का परिचय, इकाइयों का रूपांतरण।

मीटर और सेंटीमीटर का परिचय—शिक्षक मापने के लिए मीटर मापक, लंबा रूलर, दर्जी का फीता जैसे कुछ उपकरणों का संकलन करके विद्यार्थियों को उन पर लगे चिह्नों को देखने के लिए कहें। विद्यार्थियों को इन उपकरणों का प्रयोग समझाइये जिससे वे समझ सकें कि

एक मीटर = 100 सेमी.

विद्यार्थियों से कहें कि वे इन इकाइयों का प्रयोग करते हुए मापों को लिखें: राजेश का कद = 1 मीटर 30 सेमी.

रबर का आकार = 4 सेमी.

पेंसिल का आकार = 9 सेमी.

विद्यार्थियों से कहें कि वे मीटरों और सेंटीमीटरों में दिए माप को मीटरों या सेंटीमीटरों में व्यक्त करें :

1 मी. 30 सेमी. = 130 सेमी.

3 मी. 10 सेमी. = 310 सेमी.

किग्रा और ग्राम का परिचय—शिक्षक तराजू और बाट लाकर विद्यार्थियों से पूछें कि उनका किस लिए प्रयोग किया जाता है तथा वे अपनी याद से बताएं कि वे कौन-सी वस्तुएं ग्रामों में खरीदते हैं और कौन सी किग्रा में। वे उन्हें विभिन्न प्रकार के तराजूओं और बाट मापों के प्रयोग पर ध्यान देने के लिए कहें।

एक किग्रा = 1000 ग्राम

लीटर और मिलीलीटर का परिचय—शिक्षक दूध, पानी और तेल लाए और विद्यार्थी को यह बताएं कि दूध, पानी और तेल आदि लीटरों में मापे जाते हैं।

विद्यार्थियों को मगों/गिलासों और बाल्टियों का लीटरों/मिलीलीटरों में अंशांकन करने दें। उपयोग द्वारा विद्यार्थियों को यह समझने का अवसर दें कि एक लीटर = 1000 मिलीलीटर (मिली.)

वर्ग मात्रक से परिचित कराना—शिक्षक वर्गों की गणना द्वारा पोस्टकार्ड, फर्श, मेज के ऊपरी भाग आदि का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग क्षेत्रों का प्रयोग कर सकते हैं। ऐसा करने के लिए आप विद्यार्थियों से कहें कि वे किसी कागज से वर्गाकार आकृतियां काटकर उन्हें एक दूसरे कागज पर चिपकाएं अथवा वर्ग ग्रिड अंकित कागज पर आकृतियां बनाएं। आधे या आधे से अधिक वर्गों को एक मान लिया जाए और आधे से कम को छोड़ दिया जाए।

अब विद्यार्थियों से ऐसा कहें कि वे एक सेमी. भुजा और एक मीटर भुजा वाले वर्ग काटें और क्रमशः सेमी.² और मी.² का प्रयोग करते हुए इन वर्गों से नोटबुक के कागजों, पुस्तक के ऊपरी भाग तथा फर्श पर बिछी कालीनों, पर्दों आदि का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

मुद्रा (करंसी) नोट/सिक्कों से परिचित कराना—बच्चे मुद्रा नोटों/सिक्कों से पूर्व परिचित हैं। शिक्षक उन्हें सिक्कों के आकार, आकृतियों को पहचानने तथा उनके मूल्य की संकल्पना को समझने के लिए प्रेरित करें।

विद्यार्थियों को सिक्कों के मूल्यों का मिलान करने दें। उदाहरणतया:

50 पैसे का सिक्का = 25 पैसे के दो सिक्के = 20 पैसे के दो सिक्के और 5 पैसे के दो सिक्के = 10 पैसे के पांच सिक्के।

समय माप—बच्चे समय के व्यापक वितरण जैसे सुबह, अपराह्न, शाम, रात और फिर सुबह से पूर्व परिचित हैं किंतु क्रियाकलापों के नियमन के लिए हमें बड़ी या छोटी घड़ी जैसे यंत्र की आवश्यकता होती है। अब शिक्षक घड़ी का एक मॉडल प्रस्तुत करें।

घड़ी से हमें समय की जानकारी होती है। संख्यांक घंटे बताते हैं। बड़ी सुई मिनट की सुई है और छोटी सुई घंटे की।



मिनट की सुई एक संख्यांक से दूसरे संख्यांक तक पहुंचने में पांच मिनट लेती है। शिक्षक ऊपर दिए गए चित्र को प्रस्तुत करें और विद्यार्थियों से समय बताने के लिए कहें :

मिनट की सुई '6' पर है और घंटे की सुई 1 और 2 के बीच में है।

6×5 मिनट = 30 मिनट

अतः समय = 1 घंटा 30 मिनट

दिन, सप्ताह, महीना और वर्ष—शिक्षक कैलेंडर दिखाएं और सप्ताह, मास एवं वर्ष की धारणा को विकसित करें।

एक सप्ताह में सात दिन होते हैं। ये दिन हैं—रविवार, सोमवार, मंगलवार, बुधवार, बृहस्पतिवार, शुक्रवार और शनिवार। चार सप्ताहों का एक महीना होता है।

बारह महीनों का एक वर्ष होता है। ये महीने हैं—जनवरी, फरवरी, मार्च, अप्रैल, मई, जून, जुलाई, अगस्त, सितंबर, अक्टूबर, नवंबर और दिसंबर। हर महीने में दिन बराबर नहीं होते हैं, कुछ में 31 दिन तथा कुछ में 30 दिन होते हैं। इसे निम्न कविता की सहायता से याद रख सकते हैं—

अप्रैल, जून, सितंबर, नवंबर में

होते हैं दिन तीस,

फरवरी छोड़ शेष मास में होते हैं दिन इकतीस।

फरवरी की बात निराली यूं तो अक्टूबर दिन वाली, पर अधि वर्ष है जब आता अक्टूबर के हो जाते उन्नतीस।

नोट— 60 सेकंड = एक मिनट

60 मिनट = एक घंटा

24 घंटे = एक दिन

7 दिन = एक सप्ताह

30 या 31 दिन = एक महीना

12 महीने = एक वर्ष

365 दिन = एक वर्ष

366 दिन = एक लीप (अधि) वर्ष

प्रत्येक चौथा वर्ष लीप वर्ष होता है।

मीटरी पद्धति में इकाइयों का रूपांतरण—मीटरी पद्धति भी हमारी संख्या प्रणाली की तरह स्थान-मान के सिद्धांतों का पालन करती है। इसलिए, इकाइयों के रूपांतरण के लिए अधिक परिकलन की अपेक्षा नहीं होती। शिक्षक को चाहिए कि विद्यार्थियों को मीटरी मापों की संपूर्ण तालिका से परिचित कराए और उस तालिका के द्वारा संख्याओं के पढ़ने और लिखने के कौशलों के विकास में उनकी सहायता करें।

हजार सौ	दस	एक	दसवां	सौवा	हजारवां
1000 100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
किलो हेक्टा	डेका	इकाई मी./ग्रा./ली.	डेसी	सेंटी	मिली
5 3	4 5	8 9	2	1	6

तालिका की सहायता से ग्राम/लीटर से पहले लगने वाले हेक्टा, डेका, डेसी, मिली जैसे पूर्वलगनों का अर्थ स्पष्ट किया जाना चाहिए।

डेका का अर्थ है दस बार
हेक्टा का अर्थ है सौ बार
किलो का अर्थ है हजार बार

डेसी का अर्थ है दसवां भाग

सेंटी का अर्थ है सौवां भाग

मिली का अर्थ है हजारवां भाग

प्रतिदिन वास्तविक प्रयोग में कुछ पूर्वलगन बोले नहीं जाते जैसे— 5 किमी., 3 हेक्टामीटर, 4 डेकामीटर, 8 मी. को 5 किमी. 348 मी. पढ़ा जाए।
5 डेकाग्राम, 9 ग्रा., 2 डेसीग्राम, 1 सेंटीग्राम,
6 मिलीग्राम को 59 ग्रा. 216 मिलीग्राम पढ़ा जाए।

उदाहरण : घर से विद्यालय की दूरी 4 किमी. 341 मी. दी गई है। हमें इसे मीटर में रूपांतरित करना है। इसे दो तरह से रूपांतरित किया जा सकता है—

(I) एक किमी. = 1000 मी.

अतः 4 किमी. = 4×1000 मी. = 4000 मी.

इसलिए घर से विद्यालय की दूरी है।

4 किमी., 341 मी. = 4000 मी. + 341 मी. = 4341 मी.

(II) हम तालिका में इकाई के अंक लिखेंगे। अंक 4 को किमी. कॉलम में लिखेंगे। इकाई के अंक 3 को तालिका के हेक्टा मी. कॉलम में, 4 को डेका मी. के कॉलम में तथा 1 को मी. कॉलम में हम पढ़ेंगे 4341 मी.

1000	100	10	1
किमी.	हेक्टा मी.	डेका मी.	मी.
4	3	4	1

उदाहरण : 6 ग्रा. 8 डेसी ग्रा. और 7 सेंटी ग्रा. को सेंटी ग्राम में बदलिए।

6 ग्रा. = 6×100 सेंटीग्राम = 600 से. ग्रा.

8 डेसीग्राम = 8×10 सेंटीग्राम = 80 से. ग्रा.

7 सेंटीग्राम = 7 से. ग्रा.

= 687 से. ग्रा.

क्षेत्रफल—हम जानते हैं कि इकाई का वर्ग, क्षेत्रफल की मापन इकाई है। यदि वर्ग की भुजा एक सेमी. है तो क्षेत्रफल इकाई एक वर्ग सेमी. या (सेमी.)² होगा और यदि वर्ग की भुजा एक मीटर है तो क्षेत्रफल वर्ग मीटर में होगा।

लंबाई की इकाइयां	क्षेत्रफल की इकाइयां
1 किमी. = 10 हेक्टा मी.	1 वर्ग किमी. = 10 × 10 वर्ग हेक्टा मी.
1 हेक्टा मी. = 10 डेका मी.	1 वर्ग हेक्टा मी. = 10 × 10 वर्ग डेका मी.
1 डेका मी. = 10 मी.	1 वर्ग डेका मी. = 10 × 10 वर्ग मी.
1 मी. = 10 डेसी मी.	1 वर्ग मी. = 10 × 10 वर्ग डेसी मी.
1 डेसी मी. = 10 सेमी.	1 वर्ग डेसी मी. = 10 × 10 वर्ग सेमी.
1 सेमी. = 10 मिली मी.	1 वर्ग सेमी. = 10 × 10 वर्ग मिली

इससे हमें प्राप्त होता है—

एक वर्ग किमी. = 1000 × 1000 = 1000000 वर्ग मी.

एक वर्ग मी. = 100 × 100 वर्ग सेमी. = 10000 वर्ग सेमी.

उदाहरण : 70000 वर्ग सेमी. को वर्ग मी. में बदलिए।

100 × 100 वर्ग सेमी. = एक वर्ग मी.

या 10000 वर्ग सेमी. = एक वर्ग मी.

$$\begin{aligned} \text{अतः } 70000 \text{ वर्ग सेमी.} &= \frac{70000}{10000} \text{ वर्ग मी.} \\ &= 7 \text{ वर्ग मी.} \end{aligned}$$

धनराशि-

उदाहरण : रुपयों को पैसों में बदलिए।

हम जानते हैं कि एक रुपया = 100 पैसे

$$\begin{aligned} 3 \text{ रु.} &= 1 \text{ रु.} + 1 \text{ रु.} + 1 \text{ रु.} = 100 \text{ पै.} + 100 \text{ पै.} + 100 \text{ पै.} \\ &= 100 \times 3 = 300 \text{ पै.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \text{ रु.} &= 1 \text{ रु.} + 1 \text{ रु.} + 1 \text{ रु.} + 1 \text{ रु.} \\ &= 100 \text{ पै.} + 100 \text{ पै.} + 100 \text{ पै.} + 100 \text{ पै.} \\ &= 100 \times 4 = 400 \text{ पैसे} \end{aligned}$$

इसी प्रकार

$$5 \text{ रु.} = 5 \times 100 = 500 \text{ पैसे}$$

$$6 \text{ रु.} = 6 \times 100 = 600 \text{ पैसे}$$

$$7 \text{ रु.} = 7 \times 100 = 700 \text{ पैसे}$$

उदाहरण : रुपये को पैसों में बदलिए।

$$120 \text{ पै.} = 100 \text{ पैसे} + 20 \text{ पै.} = 1 \text{ रु. } 20 \text{ पैसे} = 1.20 \text{ रु.}$$

$$230 \text{ पै.} = 200 \text{ पैसे} + 30 \text{ पै.} = 2 \text{ रु. } 30 \text{ पैसे} = 2.30 \text{ रु.}$$

इसी प्रकार,

$$680 \text{ पै.} = 6.80 \text{ रु.}$$

$$467 \text{ पै.} = 4.67 \text{ रु.}$$

$$347 \text{ पै.} = 3.47 \text{ रु.}$$

समय : हम जानते हैं कि एक दिन में 24 घंटे होते हैं। एक घंटे में 60 मिनट और एक मिनट में 60 सेकंड होते हैं। किंतु दिन और महीने या वर्ष पर विचार करते समय हमारे सामने समस्या आती है। निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा इसे हम समझते हैं—

उदाहरण : 3 घंटे 45 मिनटों को मिनटों में रूपान्तरित कीजिए।

एक घंटा = 60 मिनट

$$3 \text{ घंटे} = 3 \times 60 = 180 \text{ मिनट}$$

$$3 \text{ घंटे } 45 \text{ मिनट} = 180 \text{ मिनट} + 45 \text{ मिनट} = 225 \text{ मिनट}$$

उदाहरण : वर्ष के प्रारंभिक 6 महीनों के दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हम जानते हैं कि वर्ष के प्रारंभिक 6 महीने जनवरी, फरवरी, मार्च, अप्रैल, मई

तथा जून हैं।

महीना	दिनों की संख्या
जनवरी	31
फरवरी	28
मार्च	31
अप्रैल	30
मई	31
जून	30
योग	181

नोट : यदि लीप वर्ष होता है तो फरवरी 29 दिनों की होती है। ऐसी स्थिति में दिनों की संख्या 182 होगी।

मापन इकाइयों के प्रयोग के लिए चार मूलभूत संक्रियाएं—मीटरी मापों के लिए चार आधारभूत संक्रियाएं ठीक वैसी ही हैं जैसी पूर्णांकों से संबंधित चार मूलभूत संक्रियाएं, क्योंकि दोनों स्थितियों में समान स्थान-मान का सिद्धान्त लागू होता है।

(क) लंबाई माप :

उदाहरण : सीमा 4 मी. 65 सेमी. लंबा और शीला 5 मी. 25 सेमी.

लंबा कपड़ा खरीदती हैं। उनके द्वारा खरीदे कपड़े की कुल लंबाई क्या होगी?

मी. सेमी.

$$\text{सीमा द्वारा खरीदा गया कपड़ा} = 4 \text{ मी. } 65 \text{ सेमी.}$$

$$\text{शीला द्वारा खरीदा गया कपड़ा} = 5 \text{ मी. } 25 \text{ सेमी.}$$

$$\text{खरीदे गए कुल कपड़े की लंबाई} = 9 \text{ मी. } 90 \text{ सेमी.}$$

उदाहरण : 18 मी. 36 सेमी. और 27 मी. 76 सेमी. का योग ज्ञात

कीजिए।

मी. से.मी.

$$18 \text{ मी. } 36 \text{ सेमी.}$$

$$+ 27 \text{ मी. } 76 \text{ सेमी.}$$

$$45 \text{ मी. } 112 \text{ सेमी.}$$

$$45 \text{ मी. } 112 \text{ सेमी.} = 46 \text{ मी. } 12 \text{ सेमी.}$$

(112 सेमी. को मी. में बदलने पर)

उदाहरण : 8 मी. 18 सेमी. में से 3 मी. 72 सेमी. घटाइए।

मी. सेमी.

$$7 \text{ मी. } 118 \text{ सेमी.}$$

$$- 3 \text{ मी. } 72 \text{ सेमी.}$$

$$4 \text{ मी. } 46 \text{ सेमी.}$$

उदाहरण : एक रस्सी की लंबाई 4 डेसी मी. 10 सेमी. है। ऐसी 7 रस्सियों की लंबाई क्या होगी?

डेसी मी. सेमी.

$$4 \text{ 10}$$

$$\times \text{ 7}$$

$$28 \text{ 70}$$

$$7 \text{ 00}$$

$$35 \text{ 00}$$

पहले हम 10 सेमी. का 7 से गुणा करके 70 सेमी. प्राप्त करते हैं। अब

हम 70 सेमी. को डेसी मी. में रूपांतरित कर देते हैं और 7 डेसी. मी. प्राप्त करते हैं। 4 डेसी मी. को 7 से गुणा करके 28 डेसी मी. प्राप्त करते हैं तथा उसमें 7 जोड़ देते हैं। अतः 7 रस्सियों की लम्बाई = 35 डेसी मी.

(ख) भार माप

उदाहरण : दो विद्यार्थियों का भार क्रमशः 20 किलो 300 ग्राम और 21 किलो 600 ग्राम है। उनका संयुक्त भार ज्ञात कीजिए।

किलोग्राम	ग्राम
20	300
+ 21	600
41	900

अथवा

किग्रा	ग्रा.
20.300	20300
21.600	21600
41.900	41900

धारिता माप-

उदाहरण : हम दो खाली बोतलें लेते हैं। एक मापक सिलिण्डर का प्रयोग करते हुए प्रत्येक बोतल को पानी से भरते हैं। हम पाते हैं इन बोतलों की धारिता क्रमशः 845 मिली. और 785 मिली. है। दोनों बोतलों के पानी को एक सिलिण्डर में उड़ेलने पर हमें एक लीटर 630 मिली. माप प्राप्त होता है। हम इन बोतलों की संयुक्त धारिता इस प्रकार भी ज्ञात कर सकते हैं अर्थात् जोड़कर

मिली.
845
+ 785
1630

हम इन बोतलों की संयुक्त धारिता इस प्रकार भी ज्ञात कर सकते हैं अर्थात्

$$1630 \text{ मिली} = 1000 \text{ मिली.} + 630 \text{ मिली.} \\ = 1 \text{ ली.} + 630 \text{ मिली.}$$

उदाहरण : आइए, समान धारिता की 5 खाली बोतलें लें। यदि प्रत्येक बोतल में 750 मिली. पानी हो तो हम क्या 5 बोतलों में भरे जा सकने वाले पानी की कुल मात्रा ज्ञात कर सकते हैं? हां, हम इसे जोड़कर प्राप्त कर सकते हैं।

∴ पानी की कुल मात्रा

$$= 750 \text{ मिली.} + 750 \text{ मिली.} + 750 \text{ मिली.} + 750 \text{ मिली.} + 750 \text{ मिली.} \\ = 3750 \text{ मिली. अथवा } 3 \text{ ली. } 750 \text{ मिली.}$$

या

750	मिली.
× 5	
3750	मिली.

$$\text{या } 3750 \text{ मिली} = 3 \text{ ली.} + 750 \text{ मिली.}$$

उदाहरण : आइए 5 ली. 350 मिली. पानी से भरी एक बाल्टी लें। इस बाल्टी से 2 ली. 150 मिली. पानी निकाल लें। क्या आप ज्ञात कर सकते हैं कि बाल्टी में कितना पानी बचा है?

ली.	मिली.
5	350
- 2	150
3 ली.	200 मिली.

धनराशि- आइए, धनराशि की चार आधारभूत संक्रियाओं से संबंधित कुछ

उदाहरण देखें-

उदाहरण : रु. 46.32 और रु. 17.28 का योग ज्ञात कीजिए।

रु.	पै.
46	32
+ 17	28
63	60

(i) पहले 32 पैसे + 28 पैसे = 60 पैसे (60 पैसे को पैसे के अन्तर्गत

लिखें)

(ii) रुपयों को जोड़ें $46 + 17 = 63$ रु.

उदाहरण : घटाइए-

रु.	पै.
8	75
- 2	35
6	40

(i) 75 पैसे में से 35 पैसे = 40 पैसे

(ii) 8 रु. में से 2 रु. = 6 रु.

उदाहरण : 30.25 को 5 से भाग दीजिए।

6.05
5) 30.25
30
25
25
xx

अतः उत्तर 6.05 है।

समय- आइए, समय के मापन के लिए आधारभूत संक्रियाओं के निम्न

उदाहरण देखें -

उदाहरण : एक घंटा 45 मिनट तथा एक घंटा 35 मिनट को जोड़िए।

घंटे	मिनट
1	45
+ 1	35
2	80
+ 1	

या 3 घंटा 20 मिनट

$$45 \text{ मिनट} + 35 \text{ मिनट} = 80 \text{ मिनट। } 80 \text{ मिनट को एक घंटा } 20 \text{ मिनट}$$

लिखा जा सकता है।

उदाहरण : शीला 6 बजकर 40 मिनट पर उठती है। वह 8 बजकर 50 मिनट पर विद्यालय जाती है। उसे तैयार होने में कितना समय लगता है?

यहां घटाते हैं :	घंटे	मिनट
	8	50
	6	40
	2	10

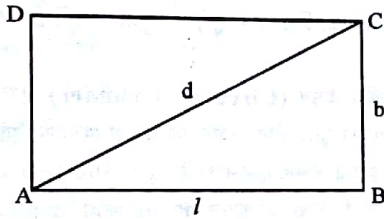
अतः हम 2 घण्टे 10 मिनट पाते हैं।

● क्षेत्रमिति (Mensuration)

हमारे समक्ष दैनिक कार्यक्षेत्र में ऐसी भी स्थितियां आती हैं जब विभिन्न वस्तुओं की मापों की आवश्यकता होती है, जैसे भूखण्ड का क्षेत्रफल, कमरे की पुताई कराने के लिए उसकी छत तथा चारों दीवारों का क्षेत्रफल, किसी क्षेत्र को घेरने के लिए आवश्यक कटीले तार की लम्बाई इत्यादि। ये सभी क्रियाकलाप किसी न किसी प्रकार से समतल आकृतियों की परिमाप तथा क्षेत्रफल अथवा ठोस के पृष्ठ क्षेत्रफल तथा आयतनों से संबंधित हैं। गणित की वह शाखा जो समतल तथा ठोस आकृतियों की लम्बाई, क्षेत्रफल तथा आयतन की मापों से संबंधित है, क्षेत्रमिति कहलाती है।

प्रमुख आकृतियां एवं उनकी माप

1. आयत (Rectangle)—यह एक समतल समकोणीय चतुर्भुज होता है जिसकी आमने-सामने की भुजाएं एक समान होती है।

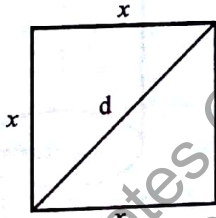


जहाँ l = लंबाई तथा b = चौड़ाई

(i) परिमाप = $2(l + b)$ (ii) क्षेत्रफल = $l \times b$

(iii) विकर्ण (d) = $\sqrt{l^2 + b^2}$

2. वर्ग (Square)—यह एक समतल समकोणीय चतुर्भुज होता है जिसकी सभी भुजाएं एक समान होती हैं।

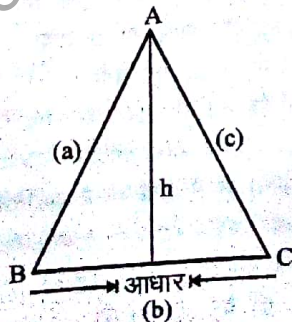


(i) परिमाप = $4 \times$ भुजा = $4 \times x$

(ii) क्षेत्रफल = x^2

(iii) विकर्ण = $\sqrt{2 \times}$ क्षेत्रफल

3. त्रिभुज—तीन सरल रेखाओं से घिरी बंद आकृति को त्रिभुज या त्रिकोण कहते हैं। त्रिभुज सबसे कम भुजाओं वाला बहुभुज है।



(i) ΔABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} bh$$

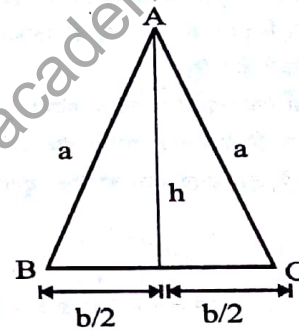
(ii) किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल जबकि केवल उसकी भुजाएं a , b एवं c ज्ञात हों परन्तु ऊँचाई अज्ञात हो।

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\left(\text{जहाँ } s = \frac{(a+b+c)}{2} \right)$$

(iii) समद्विबाहु त्रिभुज

एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएं बराबर हों, समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।



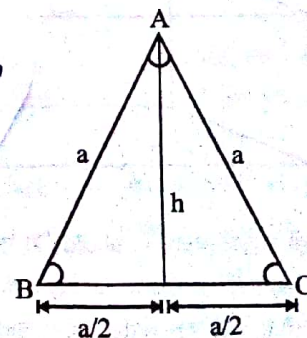
(क) समद्विबाहु Δ का क्षेत्रफल = $\frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}$

(ख) समद्विबाहु Δ का परिमाप = $(2a + b)$

(ग) समद्विबाहु Δ की ऊँचाई (h) = $\frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - b^2}$

(iv) समबाहु त्रिभुज

जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएं बराबर होती हैं उसको समबाहु त्रिभुज कहते हैं।



(क) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} (\text{भुजा})^2$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2$$

(ख) समबाहु Δ की परिमाप $= 3 \times (\text{भुजा}) = 3a$

$$\begin{aligned} \text{(ग) समबाहु } \Delta \text{ की ऊँचाई (h)} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \text{भुजा} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} a \end{aligned}$$

(घ) समबाहु Δ में $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ होता है।

$$\text{(ङ) समबाहु } \Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{(\text{ऊँचाई})^2}{\sqrt{3}} = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$$

4. वृत्त (Circle)—किसी एक निश्चित बिन्दु से समान दूरी पर स्थित बिंदुओं का बिंदुपथ वृत्त कहलाता है। यह निश्चित बिंदु, वृत्त का केन्द्र कहलाता है और केन्द्र एवं बिंदुपथ की दूरी वृत्त की त्रिज्या कहलाती है। त्रिज्या का दुगुना वृत्त का व्यास होता है।

(i) वृत्त का एक चक्कर लगाने में चलित दूरी उसकी परिमाप अथवा परिधि कहलाती है। किसी वृत्त की परिधि और उसके व्यास का अनुपात एक अचर राशि होती है। इस अचर राशि को ग्रीक (यूनानी) अक्षर π से दर्शाते हैं।

$$\therefore \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$$

$$\Rightarrow \text{परिधि} = \pi \times \text{व्यास} = \pi \times 2 \times \text{त्रिज्या} = 2\pi \times \text{त्रिज्या}$$

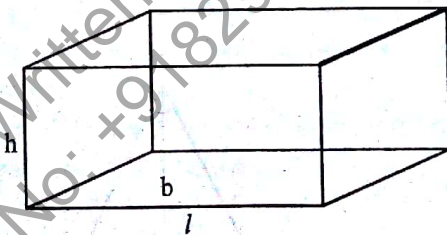
$$\text{(ii) वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi \times (\text{त्रिज्या})^2$$

5. गोला (Sphere)—यह एक त्रिविमीय, बाहर से बंद अथवा ठोस आकृति होती है तथा इसकी सतह पर मौजूद प्रत्येक बिन्दु इसके केन्द्र से एक समान दूरी पर स्थित होता है। गेंद, फुटबाल एवं ग्लोब इत्यादि इसके उदाहरण हैं।

$$\text{(i) } r \text{ त्रिज्या वाले गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{(ii) गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 4\pi r^2$$

6. घन तथा घनाभ (Cube & Cuboid)



ऊपर दी हुई आकृति घनाभ (Cuboid) है। एक आयताकार ईंट घनाभ का उदाहरण है। घनाभ के छः फलक (faces) होते हैं। दो आसन्न फलक एक रेखाखण्ड में मिलते हैं जिसे कोर (edge) कहा जाता है। एक घनाभ में बारह कोरें होती हैं।

तीन संलग्न फलकें परस्पर एक दूसरे पर लंब होती हैं और ये जिस बिंदु पर मिलती है उसे शीर्ष कहा जाता है। एक घनाभ में आठ शीर्ष होते हैं। घनाभ

एक त्रिविमीय आकृति होती है। दिए गए चित्र में घनाभ की लम्बाई 'l', चौड़ाई 'b' और ऊँचाई 'h' है।

वह घनाभ जिसकी ऊँचाई शून्य हो, एक आयत का रूप ले लेगा।

नोट—जब $l = b = h \neq 0$

अर्थात् घनाभ की सभी भुजाएं लम्बाई में बराबर हों तब इसे घन कहा जाता है। घन के फलक बराबर क्षेत्रफलों वाले वर्ग होते हैं।

$$\text{(i) घनाभ का आयतन} = \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\text{(ii) घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2(lb + bh + lh)$$

$$\text{(iii) घनाभ के विकर्ण की लम्बाई} = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

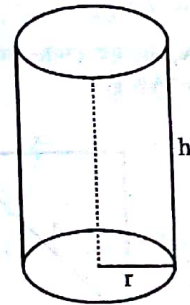
माना घन की प्रत्येक भुजा a सेमी. है, तब

$$\text{(i) घन का आयतन} = (\text{भुजा})^3 = a^3 \text{ घन सेमी.}$$

$$\text{(ii) घन के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल} = 6 \times 2(\text{भुजा})^2 = 6a^2 \text{ वर्ग सेमी.}$$

$$\text{(iii) घन का विकर्ण} = \sqrt{3} \times \text{भुजा} = \sqrt{3} a \text{ सेमी.}$$

7. वृत्तीय बेलन (Circular Cylinder)—ऐसी वस्तुएं जिनका एक पार्श्व (lateral) पृष्ठ और सर्वांगसम वृत्तीय अनुप्रस्थ परिच्छेद (cross section) हो, वृत्तीय बेलन कहलाता है। इन वृत्तीय अनुप्रस्थ परिच्छेदों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा को बेलन का अक्ष कहा जाता है। यदि बेलन का अक्ष वृत्तीय परिच्छेदों पर लम्ब हो तो ऐसा बेलन 'लम्ब वृत्तीय बेलन' (Right Circular Cylinder) कहलाता है।



$$\text{(i) त्रिज्या } r \text{ और ऊँचाई } h \text{ वाले बेलन का आयतन} = \pi r^2 h$$

$$\text{(ii) बेलन के आधार का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$\text{(iii) बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल} = 2\pi rh$$

$$\text{(iv) बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल} = 2\pi r (h + r)$$

अभ्यास प्रश्न

प्रश्न 1. लंबाई की इकाइयों के क्रम में नाम बताइये।

उत्तर : लंबाई की इकाइयों के क्रम मिली. मी., सेंटी मी., डेसी मी., डेका मी., हेक्टो मी., किलो मी. इत्यादि।

प्रश्न 2. एक वर्ग मी. = वर्ग सेमी।

उत्तर : एक वर्ग मी. = 100×100 वर्ग सेमी.
= 10000 वर्ग सेमी.

प्रश्न 3. लीप (अधि) वर्ष में दिनों की संख्या लिखिए।

उत्तर : लीप (अधि) वर्ष में दिनों की संख्या 366 होती है तथा फरवरी 29 दिनों की होती है।

प्रश्न 4. 30 मी. को सेमी. में बदलिए।

उत्तर : 30 मी. को सेमी. में, 1 मी. = 100 सेमी., 30 मी. = 30×100 सेमी. = 3000 सेमी.

प्रश्न 5. उन महीनों की संख्या एवं नाम लिखिए जिनमें 31 दिन होते हैं।

उत्तर : 31 दिनों वाले महीने जनवरी, मार्च, मई, जुलाई, अगस्त, अक्टूबर, दिसंबर हैं। इस प्रकार इनकी संख्या 7 है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. एक वृत्त का क्षेत्रफल 314 वर्ग सेमी. है। अगर π का मान 3.14 हो तो वृत्त का व्यास क्या होगा?

- (a) 100 सेमी. (b) 50 सेमी.
(c) 20 सेमी. (d) 10 सेमी.

उत्तर-(c)

हल-वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

जहाँ r = वृत्त की त्रिज्या

$\therefore$ क्षेत्रफल = $3.14 \times r^2$

$$\Rightarrow 3.14 \times r^2 = 314$$

$$\Rightarrow r^2 = 100, \Rightarrow r = 10$$

चूँकि त्रिज्या 10 सेमी., अतः व्यास = $2 \times 10 = 20$ सेमी.

2. आम का एक पेड़ लगाने के लिए 25 वर्ग मीटर जमीन चाहिए। रहीम के खेत की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 50 मीटर और 40 मीटर है। वह खेत में अधिक से अधिक कितने पेड़ लगा सकता है?

- (a) 80 (b) 70
(c) 75 (d) 85

उत्तर-(a)

हल-खेत का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई
= 50×40
= 2000 वर्ग मीटर

एक पेड़ के लिए आवश्यक स्थान का क्षेत्रफल = 25 वर्ग मीटर

अतः अधिकतम लगाए जा सकने वाले पेड़ों की कुल संख्या

$$= \frac{2000}{25} = 80$$

3. एक आयत का क्षेत्रफल 500 वर्ग सेमी. है। यदि आयत की लम्बाई 25 सेमी. हो तो उसकी परिमाप होगी-

- (a) 80 सेमी. (b) 90 सेमी.
(c) 70 सेमी. (d) 100 सेमी.

उत्तर-(b)

हल-आयत का क्षेत्रफल = 500

$$\Rightarrow \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} = 500$$

$$25 \times \text{चौड़ाई} = 500$$

$$\therefore \text{चौड़ाई} = 20 \text{ सेमी.}$$

आयत की परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

$$= 2 \times (25 + 20)$$

$$= 2 \times 45 = 90 \text{ सेमी.}$$

4. 10 सेमी. व्यास वाले एक वृत्त की परिधि क्या होगी जबकि $\pi = 3.14$?

- (a) 31.4 सेमी. (b) 3.14 सेमी.
(c) .314 सेमी. (d) 314 सेमी.

उत्तर-(a)

हल-वृत्त की परिधि = $2 \pi r$

$$= \pi \times 2r$$

$$= \pi \times \text{व्यास}$$

$$= 3.14 \times 10$$

$$= 31.4 \text{ सेमी.}$$

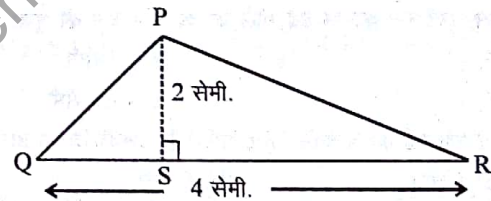
5. एक लकड़ी के वर्गाकार गुटके की लम्बाई 12 सेमी. है। गुटके का परिमाप कितना होगा?

- (a) 58 सेमी. (b) 54 सेमी.
(c) 50 सेमी. (d) 48 सेमी.

उत्तर-(d)

हल-वर्गाकार गुटके का परिमाप = $4 \times$ एक भुजा की लम्बाई
= $4 \times 12 = 48$ सेमी.

6. निम्न त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा-



- (a) 4 वर्ग सेमी. (b) 2 वर्ग सेमी.
(c) 3 वर्ग सेमी. (d) 1 वर्ग सेमी.

उत्तर-(a)

हल-त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4 \text{ वर्ग सेमी.}$$

7. एक पुस्तक की लम्बाई 20 सेमी., चौड़ाई 15 सेमी. तथा मोटाई 5 सेमी. है। उसका आयतन होगा?

- (a) 150 घन सेमी. (b) 1500 घन सेमी.
(c) 15000 घन सेमी. (d) 15 घन सेमी.

उत्तर-(b)

हल-पुस्तक का आयतन = लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ मोटाई

$$= 20 \text{ सेमी.} \times 15 \text{ सेमी.} \times 5 \text{ सेमी.} = 1500 \text{ घन सेमी.}$$

8. किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लम्बाइयों का योग तीसरी भुजा की लम्बाई-

- (a) के बराबर होता है (b) से कम होता है
(c) से अधिक होता है (d) के समानुपाती होता है

उत्तर-(c)

हल-किसी भी त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं की लम्बाइयों का योग तीसरी भुजा की लम्बाई से हमेशा अधिक होता है।

9. एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन समान है। इसकी त्रिज्या क्या होगी?

(a) 2 इकाई (b) 3 इकाई
(c) 4 इकाई (d) 5 इकाई

उत्तर-(b)

हल-प्रश्नानुसार, गोले का आयतन = गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\frac{4}{3} \pi r^3 = 4 \pi r^2$$

$$\Rightarrow \frac{r}{3} = 1 \text{ या } r = 3 \text{ इकाई}$$

10. 7 सेमी. भुजा वाले घन से एक बड़े से बड़ा गोला काट लिया गया। गोले की त्रिज्या होगी-

(a) 3 सेमी. (b) 3.5 सेमी.
(c) 4 सेमी. (d) 4.5 सेमी.

उत्तर-(b)

हल-काटे गए बड़े से बड़े गोले का व्यास = घन की भुजा

$$2r = 7 \text{ सेमी.}$$

$$\therefore r = 3.5 \text{ सेमी.}$$

11. एक गोलाई का आयतन 18π सेमी.³ है। इसकी त्रिज्या होगी-

(a) 3 सेमी. (b) 6 सेमी.
(c) 9 सेमी. (d) 12 सेमी.

उत्तर-(a)

हल-गोलाई का आयतन = 18π सेमी.³

$$\frac{2}{3} \pi r^3 = 18\pi$$

$$r^3 = \frac{18\pi \times 3}{2\pi} = 27$$

$$\therefore r = 3 \text{ सेमी.}$$

12. 2 सेमी. त्रिज्या के ठोस गोले से $\frac{1}{2}$ सेमी. त्रिज्या के कितने गोले बनाए जा सकते हैं?

(a) 62 (b) 64
(c) 66 (d) 72

उत्तर-(b)

हल- अभीष्ट गोलों की संख्या = $\frac{\text{बड़े ठोस गोले का आयतन}}{\text{छोटे गोले का आयतन}}$

$$= \frac{\frac{4}{3} \pi \times R^3}{\frac{4}{3} \pi \times r^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 64 \text{ गोले}$$

13. एक लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन 448π सेमी.³ है और ऊँचाई 7 सेमी. है। इसकी त्रिज्या क्या होगी-

(a) 5 सेमी. (b) 6 सेमी.
(c) 7 सेमी. (d) 8 सेमी.

उत्तर-(d)

हल-लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन = 448π सेमी.³

$$\therefore \pi r^2 h = 448\pi$$

$$r^2 \times 7 = 448$$

$$r^2 = \frac{448}{7} = 64$$

$$\therefore \text{त्रिज्या} = 8 \text{ सेमी.}$$

14. 2 मी. व्यास और 14 मी. गहरा एक कुँआ खोदा गया। इससे निकाली गयी मिट्टी का आयतन होगा-

(a) 40 घन मी. (b) 42 घन मी.
(c) 44 घन मी. (d) 48 घन मी.

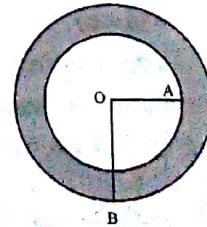
उत्तर-(c)

हल-कुँए से निकाली गयी मिट्टी का आयतन = कुँए का आयतन

$$\therefore \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 1 \times 1 \times 14 = 44 \text{ घन मी.}$$

$$(\therefore \text{त्रिज्या} = \frac{2}{2} = 1 \text{ मी.})$$

15. दो संकेन्द्रीय वृत्तों के बीच छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिनकी त्रिज्याएं क्रमशः 11 सेमी. और 10 सेमी. हैं-



(a) 66 वर्ग सेमी. (b) 76 वर्ग सेमी.
(c) 86 वर्ग सेमी. (d) 96 वर्ग सेमी.

उत्तर-(a)

हल-बड़े वृत्त की त्रिज्या (OB) = R = 11 सेमी.

छोटे वृत्त की त्रिज्या (OA) = r = 10 सेमी.

तब छायांकित भाग का क्षेत्रफल

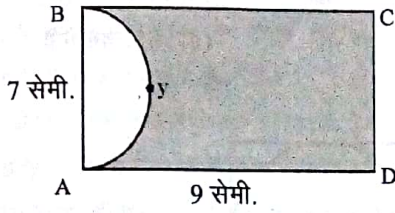
$$= \text{बड़े वृत्त का क्षेत्रफल} - \text{छोटे वृत्त का क्षेत्रफल}$$

$$= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

$$= \pi (11^2 - 10^2) = \frac{22}{7} \times (11+10) \times (11-10)$$

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 1 = 66 \text{ घन सेमी.}$$

16. संलग्न आकृति में AYB एक अर्धवृत्त है जिसका व्यास AB है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल क्या होगा?



- (a) 43.25 वर्ग सेमी. (b) 43.50 वर्ग सेमी.
(c) 43.75 वर्ग सेमी. (d) 44.00 वर्ग सेमी.

उत्तर-(c)

हल-अर्धवृत्त का व्यास (AB) = 7 सेमी.

∴ अर्धवृत्त की त्रिज्या (r) = $\frac{7}{2}$ सेमी.

∴ छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= आयत का क्षेत्रफल - अर्धवृत्त का क्षेत्रफल

$$= (9 \times 7) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \right)$$

$$\left(\because \text{अर्धवृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \pi r^2 \right)$$

$$= \left(63 - \frac{77}{4} \right) = 43.75 \text{ वर्ग सेमी.}$$

17. एक शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई क्रमशः 35 सेमी. और 72 सेमी. हैं। शंकु का आयतन होगा-

- (a) 924 घन सेमी. (b) 92.4 घन सेमी.
(c) 9240 घन सेमी. (d) 92400 घन सेमी.

उत्तर-(d)

$$\begin{aligned} \text{हल-शंकु का आयतन} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 35 \times 35 \times 72 \\ &= 92400 \text{ घन सेमी.} \end{aligned}$$

18. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होगा जिसकी भुजाएँ 5 सेमी. 4 सेमी और 8 सेमी. हैं।

- (a) 8.16 वर्ग सेमी. (b) 8.17 वर्ग सेमी.
(c) 8.18 वर्ग सेमी. (d) 8.19 वर्ग सेमी.

उत्तर-(c)

$$\text{हल- } S = \frac{\text{त्रिभुज का परिमाप}}{2}$$

$$= \frac{5+4+8}{2} = \frac{17}{2} \text{ सेमी.}$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

∴ त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{\frac{17}{2} \left(\frac{17}{2} - 5 \right) \left(\frac{17}{2} - 4 \right) \left(\frac{17}{2} - 8 \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{17}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{4} \sqrt{17 \times 7} = 8.18 \text{ वर्ग सेमी.}$$

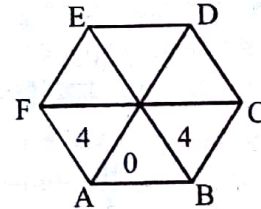
19. एक समद्विबाहु त्रिभुज जिसका आधार 10 सेमी. और बराबर भुजाओं की लम्बाई 13 सेमी. है, का क्षेत्रफल होगा-

- (a) 55 सेमी.²
(b) 60 सेमी.²
(c) 65 सेमी.²
(d) 85 सेमी.²

उत्तर-(b)

$$\begin{aligned} \text{हल-समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \frac{10}{4} \sqrt{4 \times (13)^2 - (10)^2} \\ &= \frac{10}{4} \times 24 = 60 \text{ वर्ग सेमी.} \end{aligned}$$

20. उस समषटभुज का क्षेत्रफल क्या होगा जिसकी एक भुजा 4 इकाई है?



- (a) $4\sqrt{3}$ वर्ग इकाई
(b) $14\sqrt{3}$ वर्ग इकाई
(c) $24\sqrt{3}$ वर्ग इकाई
(d) $20\sqrt{3}$ वर्ग इकाई

उत्तर-(c)

हल-समषटभुज ABCDEF 4 इकाई भुजा वाले 6 समबाहु त्रिभुजों में

विभाजित है। समबाहु त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2$

$$= 4\sqrt{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

अतः समषटभुज ABCDEF का क्षेत्रफल = $6 \times \Delta OAB$ का क्षेत्रफल

$$= 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

21. एक घन के विकर्ण की लम्बाई 17.32 सेमी. है तो उसका आयतन होगा?

- (a) 10 घन सेमी.
(b) 100 घन सेमी.
(c) 1000 घन सेमी.
(d) 1732 घन सेमी.

उत्तर-(c)

हल-घन का विकर्ण = 17.32 सेमी.

$$\sqrt{3} \times \text{भुजा} = 17.32 \text{ सेमी.}$$

$$\text{भुजा} = \frac{17.32}{\sqrt{3}} = \frac{17.32}{1.732} = 10$$

∴ घन का आयतन = $(10)^3 = 1000$ घन सेमी.

22. 10 भुजाओं वाले एक समबहुभुज के अंतःकोणों का योग एवं प्रत्येक अंतःकोण का मान क्रमशः होगा-

- (a) $8\pi, \frac{4\pi}{5}$ (b) $6\pi, \frac{4\pi}{3}$
(c) $8\pi, \frac{5\pi}{4}$ (d) $6\pi, \frac{3\pi}{4}$

उत्तर-(a)

हल-अंतःकोणों का योग

$$= (n-2) \times \pi = (10-2) \times \pi = 8\pi$$

$$\text{और प्रत्येक अंतःकोण का मान} = \left(\frac{n-2}{n} \right) \times \pi$$

$$= \left(\frac{10-2}{10} \right) \times \pi$$

$$= \frac{4\pi}{5}$$

23. यदि किसी वृत्त की त्रिज्या को 10% कम कर दिया जाए तो उसके क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की कमी होगी?

- (a) 9% (b) 19%
(c) 29% (d) 1.9%

उत्तर-(b)

$$\text{हल-क्षेत्रफल में प्रतिशत परिवर्तन} = x \times \left(2 + \frac{x}{100} \right) \%$$

$$= -10 \times \left(2 + \frac{(-10)}{100} \right) \%$$

$$= (-10) \times \left(\frac{19}{10} \right) \% = -19\%$$

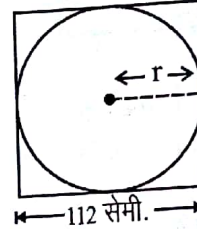
ऋणात्मक चिह्न का अर्थ है वृत्त का क्षेत्रफल 19% कम होगा।

24. 112 सेमी. भुजा वाले एक वर्ग के अन्तर्गत सबसे बड़े वृत्त का क्षेत्रफल होगा?

- (a) 98.56 वर्ग सेमी. (b) 89.65 वर्ग सेमी.
(c) 76.12 वर्ग सेमी. (d) 9856 वर्ग सेमी.

उत्तर-(d)

हल-



$$\therefore \text{त्रिज्या (r)} = \frac{112}{2} = 56$$

सबसे बड़े अंतःवृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

$$= \frac{22}{7} \times 56 \times 56 = 9856 \text{ वर्ग सेमी.}$$

25. एक पहिए का व्यास 2 सेमी. है। यदि वह आगे लुढ़ककर 10 चक्कर पूरे करता है, तो उसने कितनी दूरी तय की?

- (a) 62.8 सेमी. (b) 6.28 सेमी.
(c) 64 सेमी. (d) 66 सेमी.

उत्तर-(a)

हल-पहिए की त्रिज्या = 1 सेमी.

$$\therefore 10 \text{ चक्कर लगाने में तय दूरी} = 10 \times 2\pi r$$

$$= 10 \times 2 \times \frac{22}{7} \times 1 = 62.8 \text{ सेमी.}$$

□ ज्यामितीय संकल्पनाएं और आरेखन कौशल

अपने दैनिक जीवन में हम अनेक पदार्थों को देखते हैं तथा उनका उपयोग करते हैं। ये पदार्थ विभिन्न आकृतियों और आकार के होते हैं। हम जानते हैं, सभी मनुष्यों के अलग-अलग नाम होते हैं। इसी प्रकार इन पदार्थों के भी अलग-अलग नाम होते हैं।

उद्देश्य-घनाभ, घन, गोला, शंकु और बेलन के अभिलक्षणों को बता सकना।

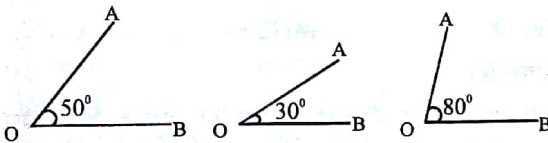
- ♦ दोस पदार्थों की सामान्य विशेषताओं का उल्लेख करना।
- ♦ वृत्त से संबंध रखने वाले विविध शब्दों को परिभाषित करना और उनका संबंध ज्ञात करना।
- ♦ त्रिभुजों का उनकी भुजाओं और कोणों के आधार पर वर्गीकरण करना।
- ♦ स्केल और कोषमापक की सहायता से विभिन्न कोणों को मापना और बनाना।
- ♦ समतल रेखा और बिंदु की संकल्पना को स्पष्ट करना।
- ♦ आयत, वर्ग, वृत्त और त्रिभुज के गुणधर्मों का उल्लेख करना।

महत्वपूर्ण तथ्य-

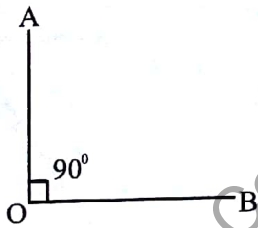
- सामान्य ठोस पदार्थों की ज्यामितीय आकृतियाँ बेलनाकार, गोलाकार, शंक्वाकार और घनाभाकार होती हैं।
- ठोस पदार्थों का वह भाग, जिसे हम देखते, छूते या प्रयोग में लाते हैं, ठोस पदार्थों की सतह कहलाता है।
- ठोस पदार्थों की सतह समतल या वक्र हो सकती है।
- समतल सतह का सभी दिशाओं में विस्तार किया जा सकता है।
- प्रत्येक ठोस पदार्थ की एक निश्चित आकृति और निश्चित सतह होती है।
- एक रेखा इच्छानुसार दोनों तरफ बढ़ाकर काफी लंबा किया जा सकता है। रेखाखंड की कोई चौड़ाई नहीं होती है।



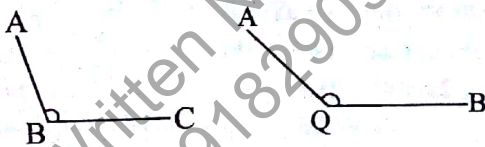
- जिस कोण का माप 0° से 90° के बीच होता है, उसे न्यून कोण कहते हैं।



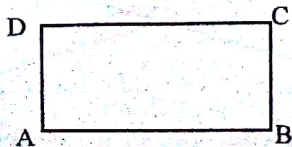
- जिस कोण का माप 90° होता है, उसे समकोण कहते हैं।



- जिस कोण का माप 90° से 180° के बीच में होता है, उसे अधिक कोण कहते हैं।

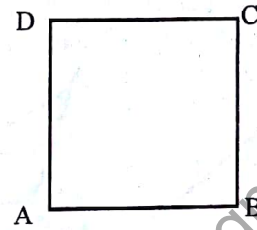
**● आयत, वर्ग और त्रिभुज**

आयत—कोई घनाभ लेँ और उसकी सीमाएँ खींचो। प्राप्त की गई आकृति चार रेखाओं से घिरी है। हम इस आकृति को आयत कहते हैं।

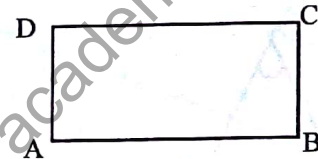


रेखाखंड AB, BC, CD और DA आयत की भुजाएँ कहलाती हैं। AB और CD तथा BC और AD आयत की सम्मुख भुजाएँ हैं।

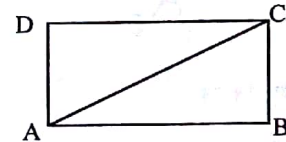
वर्ग—वर्ग की चारों भुजाएँ बराबर होती हैं। चित्र को वर्ग ABCD नाम दिया गया है। AB, BC, CD और AD रेखाओं को वर्ग की भुजाएँ कहा जाता है।



त्रिभुज—कागज पर आयत ABCD खींचिए। आकृति इस प्रकार की होगी—



A को C से मिलाने पर आकृति इस प्रकार की होगी—

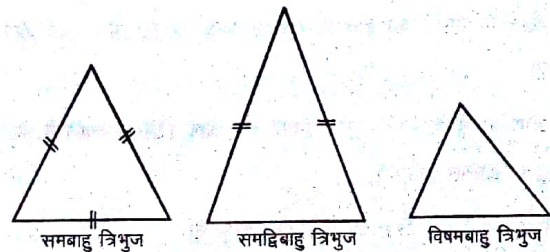


इस प्रकार यदि इस आकृति को अलग कर दिया जाता है तो प्रत्येक आकृति तीन रेखाओं से घिरी है। ऐसी प्रत्येक आकृति त्रिभुज कहलाती है।

- आयत की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं और सभी कोण 90° के होते हैं।
- वर्ग की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं और सभी कोण 90° के होते हैं।

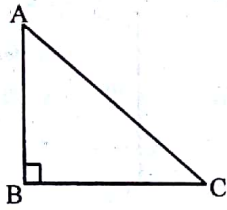
भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण

- यदि त्रिभुज की सभी भुजाओं की लंबाई समान हो तो वह त्रिभुज समबाहु त्रिभुज कहलाता है।
- यदि त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई समान होती है तो वह त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।
- यदि त्रिभुज की सभी भुजाओं की लंबाई असमान होती है तो वह त्रिभुज विषमबाहु त्रिभुज कहलाता है।

**कोणों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण**

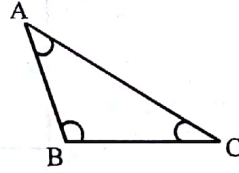
- वह त्रिभुज जिसका एक कोण समकोण (90°) होता है वह समकोण त्रिभुज कहलाता है।

- ♦ वह त्रिभुज जिसका एक कोण अधिककोण होता है, अधिककोण त्रिभुज कहलाता है।
- ♦ वह त्रिभुज जिसके सभी कोण न्यूनकोण होते हैं, न्यूनकोण त्रिभुज कहलाता है।



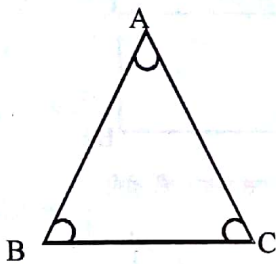
समकोण त्रिभुज

(i)



अधिक कोण त्रिभुज

(ii)



न्यूनकोण त्रिभुज

(iii)

चित्र (i) में $\angle ABC$ समकोण है अतः यह त्रिभुज समकोण है।

चित्र (ii) में $\angle ABC$ अधिककोण है अतः यह अधिककोण त्रिभुज है।

चित्र (iii) में $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ न्यूनकोण हैं अतः यह

न्यूनकोण त्रिभुज है।

कुछ अन्य महत्वपूर्ण बिंदु

घन और घनाभ दोनों के 6 पार्श्व, 12 किनारे और 8 शीर्ष होते हैं।

गोले का केवल एक पार्श्व होता है, जिसका कोई किनारा और कोई शीर्ष नहीं होता है।

शंकु के केवल दो पार्श्व, एक किनारा और एक शीर्ष होता है।

बेलन के तीन पार्श्व होते हैं, उसका कोई किनारा और कोई शीर्ष नहीं होता है।

कोण मापने के लिए प्रयुक्त इकाई को 'अंश' (डिग्री) कहते हैं और उसे $(^\circ)$ द्वारा द्योतित करते हैं।

रेखाखंड किसी रेखा का एक भाग होता है।

रेखाखंड के दो अंत्य बिंदु होते हैं, किंतु रेखा का कोई अंत्य बिंदु नहीं होता है।

समान लंबाई वाले दो या अधिक रेखाखंड को समान कहा जाता है।

प्रश्न : बताइये कि निम्नलिखित कथन सही हैं अथवा गलत।

- आयत की सभी भुजाएं हमेशा समान होती हैं।
 - आयत के सभी कोण 90° के होते हैं।
 - वर्ग की केवल सम्मुख भुजाएं सदैव समान होती हैं।
 - समद्विबाहु त्रिभुज की सभी भुजाएं समान होती हैं।
 - समकोण त्रिभुज में एक कोण 90° का होता है।
 - वृत्त के व्यास की लंबाई त्रिज्या की लंबाई की आधी होती है।
- उत्तर (i) असत्य, (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य, (v) सत्य (vi) असत्य

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. यदि दो कोण पूरक हैं, तो उनके मापों का योग होगा—

- 30°
- 60°
- 90°
- 120°

उत्तर—(c)

हल—जब दो कोणों की मापों का योग 90° होता है, तो ये कोण पूरक कोण (Complementary Angles) कहलाते हैं।

2. दो संपूरक कोणों में बड़े कोण का माप छोटे कोण के माप से 44° अधिक है। कोणों के माप होंगे—

- $58^\circ, 102^\circ$
- $68^\circ, 112^\circ$
- $44^\circ, 88^\circ$
- $70^\circ, 114^\circ$

उत्तर—(b)

हल—यदि दो कोणों की मापों का योगफल 180° हो तो उन्हें संपूरक कोण (Supplementary Angles) कहते हैं।

माना छोटा कोण a° है।

तो बड़ा कोण $(b^\circ) = a + 44^\circ$

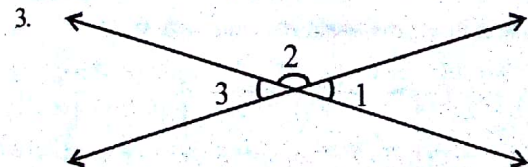
$$\therefore a^\circ + a^\circ + 44^\circ = 180^\circ$$

$$2a^\circ + 44^\circ = 180^\circ$$

$$2a^\circ = 136^\circ$$

$$a^\circ = 68^\circ$$

$$\therefore b^\circ = 68^\circ + 44^\circ = 112^\circ$$



उपर्युक्त चित्र में यदि $\angle 1 = 30^\circ$, तो $\angle 2$ एवं $\angle 3$ होंगे—

- $120^\circ, 60^\circ$
- $150^\circ, 30^\circ$

(c) $110^\circ, 70^\circ$ (d) $130^\circ, 50^\circ$

उत्तर-(b)

हल-यदि दो रेखाएं एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तो इस प्रकार बने ऊर्ध्वाधर सम्मुख कोण समान होते हैं।

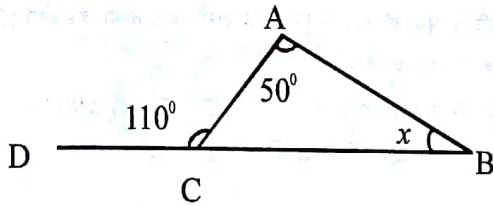
$$\therefore \angle 1 = \angle 3 = 30^\circ$$

$$\text{चूँकि } \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\therefore 30^\circ + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

4.



उपर्युक्त चित्र में x का मान होगा-

(a) 110° (b) 50° (c) 60° (d) 70°

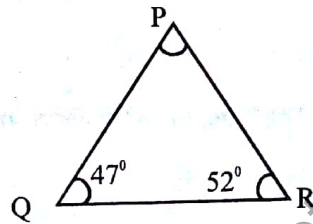
उत्तर-(c)

हल-हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दोनों सम्मुख अंतःकोणों के योग के बराबर होता है।

$$\therefore 50^\circ + x = 110^\circ$$

$$\therefore x = 110^\circ - 50^\circ = 60^\circ$$

5.



उपर्युक्त चित्र में $\angle P$ का मान होगा-

(a) 78° (b) 80° (c) 81° (d) 85°

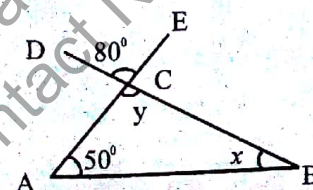
उत्तर-(c)

हल-त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180°

$$\therefore \angle P + 47^\circ + 52^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \angle P = 81^\circ$$

6.



उपर्युक्त चित्र में x तथा y का मान क्रमशः होगा-

(a) $30^\circ, 100^\circ$ (b) $40^\circ, 90^\circ$ (c) $50^\circ, 80^\circ$ (d) $60^\circ, 70^\circ$

उत्तर-(c)

हल-सम्मुख कोण $\angle DCE$ तथा $\angle y$ समान होंगे।

$$\therefore \angle y = 80^\circ$$

और $\triangle ABC$ में

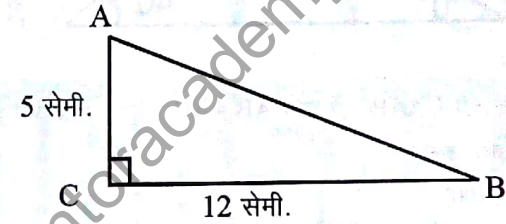
$$50^\circ + y^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore 50^\circ + 80^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

$$130^\circ + x^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore x = 50^\circ$$

7.



$\triangle ABC$ का $\angle C$ एक समकोण है। यदि $AC = 5$ सेमी. तथा $BC = 12$ सेमी., तब भुजा AB की लम्बाई होगी-

(a) 10 सेमी. (b) 11 सेमी.

(c) 12 सेमी. (d) 13 सेमी.

उत्तर-(d)

हल- $\triangle ABC$ में, पाइथागोरस प्रमेय से-

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

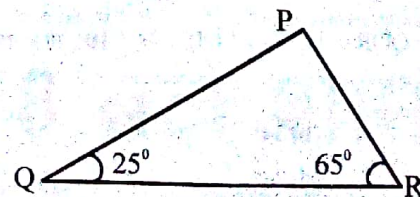
$$= 5^2 + 12^2$$

$$= 25 + 144$$

$$\therefore AB^2 = 169 \Rightarrow 13^2$$

$$\therefore AB = 13 \text{ सेमी.}$$

8. चित्र में प्रदर्शित $\triangle PQR$ में कोण $Q = 25^\circ$ और कोण $R = 65^\circ$, तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य होगा-

(a) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$ (b) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$ (c) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$ (d) $PQ^2 + QR^2 > RP^2$ 

उत्तर-(b)

हल- $\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$

$\angle P + 25^\circ + 65^\circ = 180^\circ$

$\angle P + 90^\circ = 180^\circ$

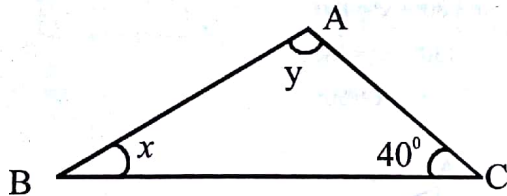
$\angle P = 90^\circ$

अतः ΔPQR एक समकोण Δ है।

$\therefore$ पाइथागोरस प्रमेय से-

$PQ^2 + RP^2 = QR^2$

9.



उपर्युक्त चित्र में ΔABC में अगर $AB = AC \neq BC$, तो x तथा y के

मान क्रमशः होंगे-

(a) $40^\circ, 100^\circ$

(b) $50^\circ, 90^\circ$

(c) $60^\circ, 80^\circ$

(d) $70^\circ, 70^\circ$

उत्तर-(a)

हल- $\therefore AB = AC$, अतः ΔABC समद्विबाहु Δ होगा। समद्विबाहु Δ की असमान भुजा उसका आधार कहलाती है तथा आधार पर बने दोनों कोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।

$\therefore$ असमान भुजा BC पर बने दोनों कोण समान होंगे।

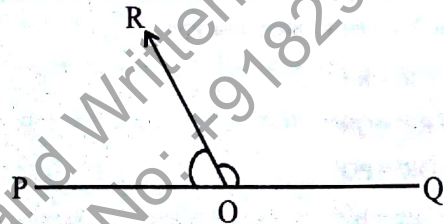
$\therefore \angle x = 40^\circ$

तथा $\angle y = 180^\circ - (40^\circ + 40^\circ)$

$= 180^\circ - 80^\circ$

$= 100^\circ$

10.



दिए गए चित्र में $\angle QOR = 3x$ और $\angle POR = 2x + 10^\circ$, तो x का मान होगा-

(a) 32°

(b) 34°

(c) 36°

(d) 38°

उत्तर-(b)

हल- POQ एक सरल रेखा है।

$\therefore \angle POR + \angle QOR = 180^\circ$

$2x + 10^\circ + 3x = 180^\circ$

$5x = 170^\circ$

$x = 34^\circ$

11. किसी पंचभुज के अंतःकोणों का योगफल होता है-

(a) 340°

(b) 360°

(c) 480°

(d) 540°

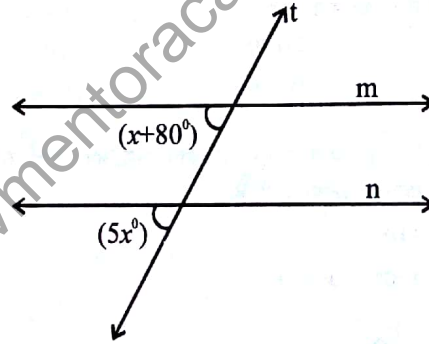
उत्तर-(d)

हल- किसी n भुजाओं वाले बहुभुज के सभी अंतःकोणों का योग $(2n - 4) \times 90^\circ$ के बराबर होता है।

$\therefore$ पंचभुज के अंतःकोणों का योगफल $= (2 \times 5 - 4) \times 90^\circ$

$= 6 \times 90^\circ = 540^\circ$

12.



उपर्युक्त चित्र में समानान्तर रेखाओं m तथा n को तिर्यक रेखा t काटती है तो x का मान होगा-

(a) 10

(b) 13.33

(c) 20

(d) इनमें से कोई नहीं

उत्तर-(c)

हल- $(x + 80^\circ)$ तथा $5x^\circ$ संगत कोण हैं।

$\therefore x + 80 = 5x$

$\Rightarrow 4x = 80,$

$\therefore x = 20$

13. एक समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण होता है-

(a) 60° का

(b) 45° का

(c) 90° का

(d) 180° का

उत्तर-(a)

हल- समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।

स पुस्तक में प्रकाशित

किसी प्रश्न-उत्तर के शंका-समाधान हेतु



8081655444

पर WhatsApp करें।



**Whats
App**

करने के नियम-

1. पुस्तक का कवर पेज भेजें।
2. पुस्तक की पृष्ठ व प्रश्न संख्या की इमेज भेजें।
3. प्रश्न से संबंधित शंका का विवरण भेजें।

संपर्क सूत्र - **सम-सामयिक घटना चक्र**

188ए/128, एलनगंज, चर्चलेन, इलाहाबाद - 211 002

☎ 0532-2465524, 2465525

**12 बजे दोपहर से 8 बजे शाम तक
(सोमवार से शुक्रवार)**

सम-सामयिक
घटना
चक्र
प्रस्तुति

शिक्षक
पात्रता
परीक्षा

UPPET
CTET

स्व

हेतु

अध्ययन सामग्री (A)
हल प्रश्न पत्र (B)

युग्म
शृंखला



अपने नजदीकी पुस्तक विक्रेता से प्राप्त करें अथवा सम्पर्क करें:-

0532-2465524, 2465525, 9335140296

समय : सोमवार से शुक्रवार (12 बजे दोपहर से 8 बजे शाम तक)

प्रकाशक

Book I.D.
18110 'S'

₹ 40/-

सम-सामयिक घटना चक्र

188A/128, एलनगंज, चर्चलेन, इलाहाबाद - 211 002